

Kapitola 5

Hranolová vazba

5.1 Úplný odraz na rozhraní dvou prostředí

Reflexní a transmisní jevy na rozhraních můžeme obecně řešit pomocí totální (celkové) matice M systému. Jestliže předpokládáme, že je systém tvořen N tenkými vrstvami s indexováním $1, 2, \dots, N$ a superstrátem 0 a substrátem $(N + 1)$, můžeme pro celkovou matici systému psát

$$M = [D^{(0)}]^{-1} D^{(1)} P^{(1)} [D^{(1)}]^{-1} \dots D^{(N)} P^{(N)} [D^{(N)}]^{-1} D^{(N+1)}, \quad (5.1.1)$$

kde D^n ($n = 0, 1, \dots, N + 1$) jsou tzv. dynamické matice a P^j ($j = 1, \dots, N$) matice šíření. Pro zjednodušení řešení se zavádí tzv. charakteristická matice j -té vrstvy:

$$S^j = D^{(j)} P^{(j)} [D^{(j)}]^{-1}. \quad (5.1.2)$$

Na základě znalosti prvků celkové matice M

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & M_{34} \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & M_{44} \end{bmatrix}. \quad (5.1.3)$$

Můžeme vyjádřit reflexní koeficienty následovně:

$$r_{12} = \left(\frac{E_{02}^{(0)}}{E_{01}^{(0)}} \right)_{E_{03}^{(0)}=0} = \frac{M_{21}M_{33} - M_{23}M_{31}}{M_{11}M_{33} - M_{13}M_{31}}, \quad (5.1.4)$$

$$r_{14} = \left(\frac{E_{04}^{(0)}}{E_{01}^{(0)}} \right)_{E_{03}^{(0)}=0} = \frac{M_{41}M_{33} - M_{43}M_{31}}{M_{11}M_{33} - M_{13}M_{31}}, \quad (5.1.5)$$

$$r_{34} = \left(\frac{E_{04}^{(0)}}{E_{03}^{(0)}} \right)_{E_{01}^{(0)}=0} = \frac{M_{11}M_{43} - M_{41}M_{13}}{M_{11}M_{33} - M_{13}M_{31}}, \quad (5.1.6)$$

$$r_{34} = \left(\frac{E_{02}^{(0)}}{E_{03}^{(0)}} \right)_{E_{01}^{(0)}=0} = \frac{M_{11}M_{23} - M_{21}M_{13}}{M_{11}M_{33} - M_{13}M_{31}}, \quad (5.1.7)$$

kde $E_{(0p)}^0$ ($p = 1, 2, 3, 4$) je komplexní amplituda intenzity elektrického pole p -tého módu v prostředí dopadu elektromagnetické vlny (index (0)).

Pro případ jediného rozhraní (0 – 1) se vyjádření celkové matice systému M transformuje do tvaru

$$M = [D^{(0)}]^{-1} D^{(1)}. \quad (5.1.8)$$

5.1.1 Úplný odraz na rozhraní dvou izotropních dielektrických prostředí

Budeme předpokládat, ve shodě s předchozím, že elektromagnetická vlna dopadá z prostředí (0) na prostředí (1). Na rozhraní obou prostředí dochází obecně k reflexním a transmisním jevům.

Pro inverzní dynamickou matici v prostředí (0) můžeme psát:

$$[D^{(0)}]^{-1} D^{(1)} = \frac{1}{2N^{(0)}\cos\varphi^{(0)}} \begin{bmatrix} N^{(0)}\cos\varphi^{(0)} & 1 & 0 & 0 \\ N^{(0)}\cos\varphi^{(0)} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N^{(0)} & -\cos\varphi^{(0)} \\ 0 & 0 & N^{(0)} & \cos\varphi^{(0)} \end{bmatrix}. \quad (5.1.9)$$

Dynamickou matici v prostředí (1) v případě úplného odrazu na rozhraní 0–1 můžeme vyjádřit ve tvaru:

$$D^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ iN^{(1)}\cos\varphi^{(1)} & -iN^{(1)}\cos\varphi^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i\cos\varphi^{(1)} & i\cos\varphi^{(1)} \\ 0 & 0 & -N^{(1)} & N^{(1)} \end{bmatrix}. \quad (5.1.10)$$

V relacích (5.1.9) a (5.1.10) výrazy $N^{(l)}$ ($l = 0, 1$) značí index lomu daného prostředí, $\varphi^{(0)}$ je úhel dopadu a $\varphi^{(1)}$ úhel lomu (s ohledem na předpoklad úplného odrazu musíme počítat, že příslušný směrový kosinus je komplexní). Na základě relací (5.1.8), (5.1.9) a (5.1.10) můžeme specifikovat celkovou matici rozhraní:

$$M = \frac{1}{2N^{(0)}\cos\varphi^{(0)}} \quad (5.1.11)$$

$$\begin{bmatrix} N^{(0)}\cos\varphi^{(0)} + iN^{(1)}\cos\varphi^{(1)} & N^{(0)}\cos\varphi^{(0)} - iN^{(1)}\cos\varphi^{(1)} & 0 & 0 \\ N^{(0)}\cos\varphi^{(0)} - iN^{(1)}\cos\varphi^{(1)} & N^{(0)}\cos\varphi^{(0)} + iN^{(1)}\cos\varphi^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & iN^{(0)}\cos\varphi^{(1)} + N^{(1)}\cos\varphi^{(0)} & iN^{(0)}\cos\varphi^{(1)} - N^{(1)}\cos\varphi^{(0)} \\ 0 & 0 & iN^{(0)}\cos\varphi^{(1)} - N^{(1)}\cos\varphi^{(0)} & iN^{(0)}\cos\varphi^{(1)} + N^{(1)}\cos\varphi^{(0)} \end{bmatrix}.$$

S pomocí vztahů (5.1.4) až (5.1.7) a (5.1.11) můžeme vyjádřit příslušné reflexní koeficienty:

$$r_{12} = r_{ss} = \frac{M_{21}}{M_{11}} = \frac{N^{(0)}\cos\varphi^{(0)} - iN^{(1)}\cos\varphi^{(1)}}{N^{(0)}\cos\varphi^{(0)} + iN^{(1)}\cos\varphi^{(1)}}. \quad (5.1.12)$$

Výraz (5.1.12) můžeme upravit do tvaru

$$\begin{aligned} r_{ss} &= \left[\frac{N^{(0)}\cos\varphi^{(0)} - iN^{(1)}\cos\varphi^{(1)}}{N^{(0)}\cos\varphi^{(0)} + iN^{(1)}\cos\varphi^{(1)}} \right] \left[\frac{N^{(0)}\cos\varphi^{(0)} - iN^{(1)}\cos\varphi^{(1)}}{N^{(0)}\cos\varphi^{(0)} - iN^{(1)}\cos\varphi^{(1)}} \right] = \\ &= \frac{[N^{(0)}\cos\varphi^{(0)}]^2 - [N^{(1)}\cos\varphi^{(1)}]^2 - 2iN^{(0)}\cos\varphi^{(0)}N^{(1)}\cos\varphi^{(1)}}{[N^{(0)}\cos\varphi^{(0)}]^2 + [N^{(1)}\cos\varphi^{(1)}]^2}. \end{aligned} \quad (5.1.13)$$

Vidíme, že

$$\begin{aligned} |r_{ss}| &= \left\{ \left(\frac{[N^{(0)}\cos\varphi^{(0)}]^2 - [N^{(1)}\cos\varphi^{(1)}]^2}{[N^{(0)}\cos\varphi^{(0)}]^2 + [N^{(1)}\cos\varphi^{(1)}]^2} \right)^2 + \left(\frac{[-2N^{(0)}\cos\varphi^{(0)}N^{(1)}\cos\varphi^{(1)}]}{[N^{(0)}\cos\varphi^{(0)}]^2 + [N^{(1)}\cos\varphi^{(1)}]^2} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = \\ &= \left\{ \frac{\left([N^{(0)}\cos\varphi^{(0)}]^2 + [N^{(1)}\cos\varphi^{(1)}]^2 \right)^2}{\left([N^{(0)}\cos\varphi^{(0)}]^2 + [N^{(1)}\cos\varphi^{(1)}]^2 \right)^2} \right\}^{\frac{1}{2}} = 1 \end{aligned} \quad (5.1.14)$$

Relace (5.1.14) potvrzuje podmínku úplného odrazu na rozhraní 0–1 pro s -polarizovanou vlnu. Pro případ p -polarizace platí (viz vztah (5.1.6) a matice (5.1.11)):

$$r_{pp} = \frac{M_{43}}{M_{33}} = \frac{iN^{(0)}\cos\varphi^{(1)} - N^{(1)}\cos\varphi^{(0)}}{iN^{(0)}\cos\varphi^{(1)} + iN^{(1)}\cos\varphi^{(0)}}. \quad (5.1.15)$$

Opět provedeme obdobnou úpravu jako u relace ve vztahu (5.1.13):

$$\begin{aligned} r_{pp} &= \left[\frac{-N^{(1)}\cos\varphi^{(0)} + iN^{(0)}\cos\varphi^{(1)}}{N^{(1)}\cos\varphi^{(0)} + iN^{(0)}\cos\varphi^{(1)}} \right] \left[\frac{N^{(1)}\cos\varphi^{(0)} - iN^{(0)}\cos\varphi^{(1)}}{N^{(1)}\cos\varphi^{(0)} - iN^{(0)}\cos\varphi^{(1)}} \right] = \\ &= \frac{[N^{(0)}\cos\varphi^{(1)}]^2 - [N^{(1)}\cos\varphi^{(0)}]^2 + 2iN^{(0)}\cos\varphi^{(1)}N^{(1)}\cos\varphi^{(0)}}{[N^{(1)}\cos\varphi^{(0)}]^2 + [N^{(0)}\cos\varphi^{(1)}]^2}. \end{aligned} \quad (5.1.16)$$

Vidíme, že

$$|r_{pp}| = \left\{ \left(\frac{[N^{(0)}\cos\varphi^{(1)}]^2 - [N^{(1)}\cos\varphi^{(0)}]^2}{[N^{(1)}\cos\varphi^{(0)}]^2 + [N^{(0)}\cos\varphi^{(1)}]^2} \right)^2 + \left(\frac{[2N^{(0)}\cos\varphi^{(1)}N^{(1)}\cos\varphi^{(0)}]}{[N^{(1)}\cos\varphi^{(0)}]^2 + [N^{(0)}\cos\varphi^{(1)}]^2} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left\{ \frac{\left([N^{(1)} \cos \varphi^{(0)}]^2 + [N^{(0)} \cos \varphi^{(1)}]^2 \right)^2}{\left([N^{(1)} \cos \varphi^{(0)}]^2 + [N^{(0)} \cos \varphi^{(1)}]^2 \right)^2} \right\}^{\frac{1}{2}} = 1. \quad (5.1.17)$$

Relace (5.1.17) potvrzuje podmínku úplného odrazu na rozhraní 0–1 pro p -polarizovanou vlnu. V případě výpočtu fází reflexních členů ze vztahů (5.1.13) a (5.1.16) dostáváme:

$$\phi_{ss} = \arctg \frac{\Im r_{ss}}{\Re r_{ss}} = \arctg \frac{-2N^{(0)} \cos \varphi^{(0)} N^{(1)} \cos \varphi^{(1)}}{[N^{(0)} \cos \varphi^{(0)}]^2 - [N^{(1)} \cos \varphi^{(1)}]^2}. \quad (5.1.18)$$

$$\phi_{pp} = \arctg \frac{\Im r_{pp}}{\Re r_{pp}} = \arctg \frac{2N^{(0)} \cos \varphi^{(1)} N^{(1)} \cos \varphi^{(0)}}{[N^{(0)} \cos \varphi^{(1)}]^2 - [N^{(1)} \cos \varphi^{(0)}]^2}. \quad (5.1.19)$$

5.1.2 Úplný odraz na rozhraní izotropního a anizotropního prostředí

Transverzální konfigurace anizotropního prostředí

Dynamickou matici pro anizotropní prostředí s transverzální geometrií můžeme vyjádřit ve tvaru :

$$D^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ D_{21}^{(1)} & -D_{21}^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_{33}^{(1)} & D_{33}^{(1)} \\ 0 & 0 & D_{43}^{(1)} & D_{44}^{(1)} \end{bmatrix}, \quad (5.1.20)$$

kde

$$D_{21}^{(1)} = N_{z1}^{(1)},$$

$$D_{33}^{(1)} = \epsilon_0^{(1)} - N_y^2, \quad (5.1.21)$$

$$D_{43}^{(1)} = -\left(-iN_y \epsilon_1^{(1)} + N_{z3}^{(1)} \epsilon_0^{(1)} \right),$$

$$D_{44}^{(1)} = -\left(-iN_y \epsilon_1^{(1)} + N_{z4}^{(1)} \epsilon_0^{(1)} \right).$$

Prvky $N_{zj}^{(1)}$ můžeme s uvážením podmínky úplného odrazu vyjádřit ve tvaru:

$$N_{z1}^{(1)} = i \left(\epsilon_0^{(1)} - N_y^{(2)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$N_{z3,4}^{(1)} = i \left(2\epsilon_0^{(1)} \right)^{-1} \left\{ \pm \left[4\epsilon_0^{(1)2} \left(\epsilon_0^{(1)} - N_y^2 \right) - 4\epsilon_1^{(1)2} \epsilon_0^{(1)} \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \quad (5.1.22)$$

Pro celkovou matici rozhraní tedy můžeme psát (viz (5.1.9) a (5.1.20)):

$$M = [D^{(0)}]^{-1} D^{(1)} \frac{1}{2N^{(0)}\cos\varphi^{(0)}} \quad (5.1.23)$$

$$= \frac{1}{2N^{(0)}\cos\varphi^{(0)}} \begin{bmatrix} N^{(0)}\cos\varphi^{(0)} & 1 & 0 & 0 \\ N^{(0)}\cos\varphi^{(0)} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N^{(0)} & -\cos\varphi^{(0)} \\ 0 & 0 & N^{(0)} & \cos\varphi^{(0)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ D_{21}^{(1)} & -D_{21}^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_{33}^{(1)} & D_{33}^{(1)} \\ 0 & 0 & D_{43}^{(1)} & D_{44}^{(1)} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2N^{(0)}\cos\varphi^{(0)}} \begin{bmatrix} N^{(0)}\cos\varphi^{(0)} + D_{21}^{(1)} & N^{(0)}\cos\varphi^{(0)} - D_{21}^{(1)} & 0 & 0 \\ N^{(0)}\cos\varphi^{(0)} - D_{21}^{(1)} & N^{(0)}\cos\varphi^{(0)} + D_{21}^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_{33}^{(1)}N^{(0)} - D_{43}^{(1)}\cos\varphi^{(0)} & D_{33}^{(1)}N^{(0)} - D_{44}^{(1)}\cos\varphi^{(0)} \\ 0 & 0 & D_{33}^{(1)}N^{(0)} + D_{43}^{(1)}\cos\varphi^{(0)} & D_{33}^{(1)}N^{(0)} + D_{44}^{(1)}\cos\varphi^{(0)} \end{bmatrix}.$$

Ze soustavy rovnic (5.1.23) je zřejmé, že při odrazu na uvedeném typu rozhraní nedochází ke změně polarizací (blokově diagonalizovaná matice M). S využitím vztahů (5.1.4), (5.1.6) a (5.1.23) můžeme vyjádřit reflexní koeficienty:

$$r_{ss} = \frac{N^{(0)}\cos\varphi^{(0)} - D_{21}^{(1)}}{N^{(0)}\cos\varphi^{(0)} + D_{21}^{(1)}}, \quad (5.1.24)$$

$$r_{pp} = \frac{D_{33}^{(1)}N^{(0)} + D_{43}^{(1)}\cos\varphi^{(0)}}{D_{33}^{(1)}N^{(0)} - D_{43}^{(1)}\cos\varphi^{(0)}}. \quad (5.1.25)$$

Dosazením ze vztahů (5.1.21) a (5.1.22) dostáváme:

$$r_{ss} = \frac{N^{(0)}\cos\varphi^{(0)} - i \left(\epsilon_0^{(1)} - N_y^2 \right)^{\frac{1}{2}}}{N^{(0)}\cos\varphi^{(0)} + i \left(\epsilon_0^{(1)} - N_y^2 \right)^{\frac{1}{2}}} =$$

$$= \frac{\left[N^{(0)}\cos\varphi^{(0)} - i \left(\epsilon_0^{(1)} - N_y^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] \left[N^{(0)}\cos\varphi^{(0)} - i \left(\epsilon_0^{(1)} - N_y^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right]}{\left[N^{(0)}\cos\varphi^{(0)} + i \left(\epsilon_0^{(1)} - N_y^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] \left[N^{(0)}\cos\varphi^{(0)} - i \left(\epsilon_0^{(1)} - N_y^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right]} =$$

$$= \frac{\left[N^{(0)}\cos\varphi^{(0)} \right]^2 - \left(\epsilon_0^{(1)} - N_y^2 \right) - i2N^{(0)}\cos\varphi^{(0)} \left(\epsilon_0^{(1)} - N_y^2 \right)^{\frac{1}{2}}}{\left[N^{(0)}\cos\varphi^{(0)} \right]^2 + \left(\epsilon_0^{(1)} - N_y^2 \right)}. \quad (5.1.26)$$

Vidíme, že

$$|r_{ss}| = \left\{ \left(\frac{[N^{(0)} \cos \varphi^{(0)}]^2 - (\epsilon_0^{(1)} - N_y^2)}{[N^{(0)} \cos \varphi^{(0)}]^2 + (\epsilon_0^{(1)} - N_y^2)} \right)^2 + \left(\frac{-2N^{(0)} \cos \varphi^{(0)} (\epsilon_0^{(1)} - N_y^2)^{\frac{1}{2}}}{[N^{(0)} \cos \varphi^{(0)}]^2 + (\epsilon_0^{(1)} - N_y^2)} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left\{ \frac{\left([N^{(0)} \cos \varphi^{(0)}]^2 + (\epsilon_0^{(1)} - N_y^2)^2 \right)^2}{\left([N^{(0)} \cos \varphi^{(0)}]^2 + (\epsilon_0^{(1)} - N_y^2)^2 \right)^2} \right\}^{\frac{1}{2}} = 1. \quad (5.1.27)$$

Fázi reflexního koeficientu r_{ss} můžeme zapsat ve tvaru:

$$\phi_{ss} = \arctg \frac{\Im r_{ss}}{\Re r_{ss}} = \arctg \frac{-2N^{(0)} \cos \varphi^{(0)} (\epsilon_0^{(1)} - N_y^2)^{\frac{1}{2}}}{[N^{(0)} \cos \varphi^{(0)}]^2 - (\epsilon_0^{(1)} - N_y^2)}. \quad (5.1.28)$$

Dosazením ze vztahů (5.1.21) a (5.1.22) do reflexního koeficientu r_{pp} dostáváme:

$$r_{pp} = \frac{N^{(0)} (\epsilon_0^{(1)} - N_y^2) - \left(-iN_y \epsilon_1^{(1)} + i \left(2\epsilon_0^{(1)} \right)^{-1} \{ + [4\epsilon_0^{(1)2} (\epsilon_0^{(1)} - N_y^2) - 4\epsilon_1^{(1)2} \epsilon_0^{(1)}]^{\frac{1}{2}} \} \epsilon_0^{(1)} \right) \cos \varphi^{(0)}}{N^{(0)} (\epsilon_0^{(1)} - N_y^2) + \left(-iN_y \epsilon_1^{(1)} + i \left(2\epsilon_0^{(1)} \right)^{-1} \{ + [4\epsilon_0^{(1)2} (\epsilon_0^{(1)} - N_y^2) - 4\epsilon_1^{(1)2} \epsilon_0^{(1)}]^{\frac{1}{2}} \} \epsilon_0^{(1)} \right) \cos \varphi^{(0)}}. \quad (5.1.29)$$

Výraz (5.1.29) můžeme zapsat ve tvaru:

$$r_{pp} = \frac{A - iB}{A + iB} = \frac{A^2 - B^2 - i2AB}{A^2 + B^2}, \quad (5.1.30)$$

kde

$$A = N^{(0)} (\epsilon_0^{(1)} - N_y^2), \quad (5.1.31)$$

$$B = \left(-N_y \epsilon_1^{(1)} + \left(2\epsilon_0^{(1)} \right)^{-1} \{ + [4\epsilon_0^{(1)2} (\epsilon_0^{(1)} - N_y^2) - 4\epsilon_1^{(1)2} \epsilon_0^{(1)}]^{\frac{1}{2}} \} \epsilon_0^{(1)} \right) \cos \varphi^{(0)}. \quad (5.1.32)$$

Z relace (5.1.30) jednoduše vyplývá:

$$|r_{pp}| = 1. \quad (5.1.33)$$

Fázi reflexního koeficientu r_{pp} vypočteme ze vztahu (viz (5.1.30))

$$\phi_{pp} = \arctg \frac{-2AB}{A^2 - B^2}, \quad (5.1.34)$$

kde za A a B dosadíme z relací (5.1.31) a (5.1.32).

Longitudinální konfigurace anizotropního prostředí

Dynamickou matici pro anizotropní prostředí s longitudinální geometrií můžeme vyjádřit ve tvaru:

$$D^{(1)} = \begin{bmatrix} D_{11}^{(1)} & -D_{11}^{(1)} & D_{13}^{(1)} & -D_{13}^{(1)} \\ D_{21}^{(1)} & -D_{21}^{(1)} & D_{23}^{(1)} & D_{23}^{(1)} \\ D_{31}^{(1)} & D_{31}^{(1)} & D_{33}^{(1)} & D_{33}^{(1)} \\ D_{41}^{(1)} & -D_{41}^{(1)} & D_{43}^{(1)} & -D_{43}^{(1)} \end{bmatrix}, \quad (5.1.35)$$

kde

$$D_{11}^{(1)} = -i\epsilon_1^{(1)} N_y N_z^{(1)+},$$

$$D_{13}^{(1)} = -i\epsilon_1^{(1)} N_y N_z^{(1)-},$$

$$D_{21}^{(1)} = -i\epsilon_1^{(1)} N_y N_z^{(1)+2},$$

$$D_{23}^{(1)} = -i\epsilon_1^{(1)} N_y N_z^{(1)-2},$$

$$D_{31}^{(1)} = \left(\epsilon_0^{(1)} - N_y^2 \right) \left(\epsilon_0^{(1)} - N_y^2 - N_z^{(1)+2} \right) - \epsilon_1^{(1)2},$$

$$D_{33}^{(1)} = \left(\epsilon_0^{(1)} - N_y^2 \right) \left(\epsilon_0^{(1)} - N_y^2 - N_z^{(1)-2} \right) - \epsilon_1^{(1)2},$$

$$D_{41}^{(1)} = N_z^{(1)+} \left[\epsilon_0^{(1)} \left(\epsilon_0^{(1)} - N_y^2 - N_z^{(1)+2} \right) - \epsilon_1^{(1)2} \right],$$

$$D_{43}^{(1)} = N_z^{(1)-} \left[\epsilon_0^{(1)} \left(\epsilon_0^{(1)} - N_y^2 - N_z^{(1)-2} \right) - \epsilon_1^{(1)2} \right]. \quad (5.1.36)$$

Prvky $N_z^{(1)\pm}$ můžeme pomocí vztahu (25.18) a s uvážením podmínky úplného odrazu vyjádřit ve tvaru:

$$N_z^{(1)\pm} = i \left[\epsilon_0^{(1)} - N_y^2 \pm \epsilon_1^{(1)} N_y \left(\epsilon_0^{(1)} \right)^{-\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (5.1.37)$$

Pro celkovou matici rozhraní tedy můžeme psát (viz (5.1.9) a (5.1.35)):

$$M = [D^{(0)}]^{-1} D^{(1)} \frac{1}{2N^{(0)} \cos \varphi^{(0)}} \quad (5.1.38)$$

$$\begin{bmatrix} N^{(0)} \cos \varphi^{(0)} & 1 & 0 & 0 \\ N^{(0)} \cos \varphi^{(0)} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N^{(0)} & -\cos \varphi^{(0)} \\ 0 & 0 & N^{(0)} & \cos \varphi^{(0)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{11}^{(1)} & -D_{11}^{(1)} & D_{13}^{(1)} & -D_{13}^{(1)} \\ D_{21}^{(1)} & -D_{21}^{(1)} & D_{23}^{(1)} & D_{23}^{(1)} \\ D_{31}^{(1)} & D_{31}^{(1)} & D_{33}^{(1)} & D_{33}^{(1)} \\ D_{41}^{(1)} & -D_{41}^{(1)} & D_{43}^{(1)} & -D_{43}^{(1)} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2N^{(0)} \cos \varphi^{(0)}}$$

$$\begin{bmatrix} D_{11}^{(1)} N^{(0)} + D_{21}^{(1)} & -D_{11}^{(1)} N^{(0)} \cos \varphi^{(0)} + D_{21}^{(1)} & D_{13}^{(1)} N^{(0)} \cos \varphi^{(0)} + D_{23}^{(1)} & -D_{13}^{(1)} N^{(0)} \cos \varphi^{(0)} + D_{23}^{(1)} \\ D_{11}^{(1)} N^{(0)} \cos \varphi^{(0)} - D_{21}^{(1)} & -D_{11}^{(1)} N^{(0)} \cos \varphi^{(0)} - D_{21}^{(1)} & D_{13}^{(1)} N^{(0)} \cos \varphi^{(0)} - D_{23}^{(1)} & -D_{13}^{(1)} N^{(0)} \cos \varphi^{(0)} - D_{23}^{(1)} \\ D_{31}^{(1)} N^{(0)} - D_{41}^{(1)} \cos \varphi^{(0)} & D_{31}^{(1)} N^{(0)} + D_{41}^{(1)} \cos \varphi^{(0)} & D_{33}^{(1)} N^{(0)} - D_{43}^{(1)} \cos \varphi^{(0)} & D_{33}^{(1)} N^{(0)} + D_{43}^{(1)} \cos \varphi^{(0)} \\ D_{31}^{(1)} N^{(0)} + D_{41}^{(1)} \cos \varphi^{(0)} & D_{31}^{(1)} N^{(0)} - D_{41}^{(1)} \cos \varphi^{(0)} & D_{33}^{(1)} N^{(0)} + D_{43}^{(1)} \cos \varphi^{(0)} & D_{33}^{(1)} N^{(0)} - D_{43}^{(1)} \cos \varphi^{(0)} \end{bmatrix}.$$

Matice (5.1.38) není již blokově diagonalizovaná a při odrazu vlny dochází k polarizačním změnám (jsou nenulové reflexní koeficienty specifikované rovnicemi (5.1.5) a (5.1.7)). S využitím vztahů (5.1.4), (5.1.6) a (5.1.38) můžeme vyjádřit reflexní koeficienty:

$$r_{12} = \frac{[-D_{11}^{(1)} N^{(0)} \cos \varphi^{(0)} + D_{21}^{(1)}] [D_{33}^{(1)} N^{(0)} - D_{43}^{(1)} \cos \varphi^{(0)}] - [D_{13}^{(1)} N^{(0)} \cos \varphi^{(0)} - D_{23}^{(1)}] [D_{31}^{(1)} N^{(0)} - D_{41}^{(1)} \cos \varphi^{(0)}]}{[D_{11}^{(1)} N^{(0)} + D_{21}^{(1)}] [D_{33}^{(1)} N^{(0)} - D_{43}^{(1)} \cos \varphi^{(0)}] - [D_{13}^{(1)} N^{(0)} \cos \varphi^{(0)} + D_{23}^{(1)}] [D_{31}^{(1)} N^{(0)} - D_{41}^{(1)} \cos \varphi^{(0)}]} \quad (5.1.39)$$

$$r_{34} = \frac{[D_{11}^{(1)} N^{(0)} + D_{21}^{(1)}] [D_{33}^{(1)} N^{(0)} + D_{43}^{(1)} \cos \varphi^{(0)}] - [D_{31}^{(1)} N^{(0)} + D_{41}^{(1)} \cos \varphi^{(0)}] [D_{13}^{(1)} N^{(0)} \cos \varphi^{(0)} + D_{23}^{(1)}]}{[D_{11}^{(1)} N^{(0)} + D_{21}^{(1)}] [D_{33}^{(1)} N^{(0)} - D_{43}^{(1)} \cos \varphi^{(0)}] - [D_{13}^{(1)} N^{(0)} \cos \varphi^{(0)} + D_{23}^{(1)}] [D_{31}^{(1)} N^{(0)} - D_{41}^{(1)} \cos \varphi^{(0)}]}. \quad (5.1.40)$$

Stejným postupem s využitím relací (5.1.5) a (5.1.7) a matice rozhraní M (5.1.38) můžeme vyjádřit konverzní reflexní koeficienty v anizotropním prostředí rozhraní izotropní–anizotropní s longitudinálním uspořádáním:

$$r_{14} = \frac{[D_{31}^{(1)} N^{(0)} + D_{41}^{(1)} \cos \varphi^{(0)}] [D_{33}^{(1)} N^{(0)} - D_{43}^{(1)} \cos \varphi^{(0)}] - [D_{33}^{(1)} N^{(0)} + D_{43}^{(1)} \cos \varphi^{(0)}] [D_{31}^{(1)} N^{(0)} - D_{41}^{(1)} \cos \varphi^{(0)}]}{[D_{11}^{(1)} N^{(0)} + D_{21}^{(1)}] [D_{33}^{(1)} N^{(0)} - D_{43}^{(1)} \cos \varphi^{(0)}] - [D_{13}^{(1)} N^{(0)} \cos \varphi^{(0)} + D_{23}^{(1)}] [D_{31}^{(1)} N^{(0)} - D_{41}^{(1)} \cos \varphi^{(0)}]} \quad (5.1.41)$$

$$r_{32} = \frac{[D_{11}^{(1)} N^{(0)} + D_{21}^{(1)}] [D_{13}^{(1)} N^{(0)} \cos \varphi^{(0)} - D_{23}^{(1)}] - [D_{11}^{(1)} N^{(0)} \cos \varphi^{(0)} - D_{21}^{(1)}] [D_{13}^{(1)} N^{(0)} \cos \varphi^{(0)} + D_{23}^{(1)}]}{[D_{11}^{(1)} N^{(0)} + D_{21}^{(1)}] [D_{33}^{(1)} N^{(0)} - D_{43}^{(1)} \cos \varphi^{(0)}] - [D_{13}^{(1)} N^{(0)} \cos \varphi^{(0)} + D_{23}^{(1)}] [D_{31}^{(1)} N^{(0)} - D_{41}^{(1)} \cos \varphi^{(0)}]} \quad (5.1.42)$$

Polární konfigurace anizotropního prostředí

Dynamickou matici pro anizotropní prostředí s polární geometrií můžeme vyjádřit ve tvaru:

$$D^{(1)} = \begin{bmatrix} D_{11}^{(1)} & D_{11}^{(1)} & D_{11}^{(1)} & D_{11}^{(1)} \\ D_{21}^{(1)} & -D_{21}^{(1)} & D_{23}^{(1)} & -D_{23}^{(1)} \\ D_{31}^{(1)} & D_{31}^{(1)} & D_{33}^{(1)} & D_{33}^{(1)} \\ D_{41}^{(1)} & -D_{41}^{(1)} & D_{43}^{(1)} & -D_{43}^{(1)} \end{bmatrix}, \quad (5.1.43)$$

kde

$$D_{11}^{(1)} = -i\epsilon_1^{(1)} \left(\epsilon_0^{(1)} - N_y^2 \right),$$

$$D_{21}^{(1)} = N_z^{(1)+} \left[-i\epsilon_1^{(1)} \left(\epsilon_0^{(1)} - N_y^2 \right) \right],$$

$$D_{23}^{(1)} = N_z^{(1)-} \left[-i\epsilon_1^{(1)} \left(\epsilon_0^{(1)} - N_y^2 \right) \right],$$

$$D_{31}^{(1)} = \left(\epsilon_0^{(1)} - N_y^2 \right) \left(\epsilon_0^{(1)} - N_y^2 - N_z^{(1)+2} \right),$$

$$D_{33}^{(1)} = \left(\epsilon_0^{(1)} - N_y^2 \right) \left(\epsilon_0^{(1)} - N_y^2 - N_z^{(1)-2} \right),$$

$$D_{41}^{(1)} = -N_z^{(1)+} \epsilon_0^{(1)} \left(\epsilon_0^{(1)} - N_y^2 - N_z^{(1)+2} \right),$$

$$D_{43}^{(1)} = -N_z^{(1)-} \epsilon_0^{(1)} \left(\epsilon_0^{(1)} - N_y^2 - N_z^{(1)-2} \right). \quad (5.1.44)$$

Prvky $N_z^{(1)\pm}$ můžeme pomocí vztahu (25.5) a s uvažáním podmínky úplného odrazu vyjádřit ve tvaru:

$$N_z^{(1)\pm} = i \left[\epsilon_0^{(1)} - N_y^2 \pm \epsilon_1^{(1)} \left(\epsilon_0^{(1)} - N_y^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\epsilon_0^{(1)} \right)^{-\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (5.1.45)$$

Pro celkovou matici rozhraní tedy můžeme psát (viz (5.1.9) a (5.1.43)):

$$M = [D^{(0)}]^{-1} D^{(1)} \frac{1}{2N^{(0)}\cos\varphi^{(0)}} \quad (5.1.46)$$

$$\begin{bmatrix} N^{(0)}\cos\varphi^{(0)} & 1 & 0 & 0 \\ N^{(0)}\cos\varphi^{(0)} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N^{(0)} & -\cos\varphi^{(0)} \\ 0 & 0 & N^{(0)} & \cos\varphi^{(0)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{11}^{(1)} & D_{11}^{(1)} & D_{11}^{(1)} & D_{11}^{(1)} \\ D_{21}^{(1)} & -D_{21}^{(1)} & D_{23}^{(1)} & -D_{23}^{(1)} \\ D_{31}^{(1)} & D_{31}^{(1)} & D_{33}^{(1)} & D_{33}^{(1)} \\ D_{41}^{(1)} & -D_{41}^{(1)} & D_{43}^{(1)} & -D_{43}^{(1)} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2N^{(0)}\cos\varphi^{(0)}}$$

$$\begin{bmatrix} D_{11}^{(1)}N^{(0)}\cos\varphi^{(0)} + D_{21}^{(1)} & D_{11}^{(1)}N^{(0)}\cos\varphi^{(0)} - D_{21}^{(1)} & D_{11}^{(1)}N^{(0)}\cos\varphi^{(0)} + D_{23}^{(1)} & D_{11}^{(1)}N^{(0)}\cos\varphi^{(0)} + D_{23}^{(1)} \\ D_{11}^{(1)}N^{(0)}\cos\varphi^{(0)} - D_{21}^{(1)} & D_{11}^{(1)}N^{(0)}\cos\varphi^{(0)} + D_{21}^{(1)} & D_{11}^{(1)}N^{(0)}\cos\varphi^{(0)} - D_{23}^{(1)} & D_{11}^{(1)}N^{(0)}\cos\varphi^{(0)} + D_{23}^{(1)} \\ D_{31}^{(1)}N^{(0)} - D_{41}^{(1)}\cos\varphi^{(0)} & D_{31}^{(1)}N^{(0)} + D_{41}^{(1)}\cos\varphi^{(0)} & D_{33}^{(1)}N^{(0)} - D_{43}^{(1)}\cos\varphi^{(0)} & D_{33}^{(1)}N^{(0)} + D_{43}^{(1)}\cos\varphi^{(0)} \\ D_{31}^{(1)}N^{(0)} + D_{41}^{(1)}\cos\varphi^{(0)} & D_{31}^{(1)}N^{(0)} - D_{41}^{(1)}\cos\varphi^{(0)} & D_{33}^{(1)}N^{(0)} + D_{43}^{(1)}\cos\varphi^{(0)} & D_{33}^{(1)}N^{(0)} - D_{43}^{(1)}\cos\varphi^{(0)} \end{bmatrix}.$$

Matice (5.1.46) není již blokově diagonalizovaná a při odrazu vlny dochází k polarizačním změnám (jsou nenulové reflexní koeficienty specifikované rovnicemi (5.1.5) a (5.1.7)). S využitím vztahů (5.1.4), (5.1.6) a (5.1.46) můžeme vyjádřit reflexní koeficienty:

$$r_{12} = \frac{[D_{11}^{(1)} N^{(0)} \cos \varphi^{(0)} - D_{21}^{(1)}] [D_{33}^{(1)} N^{(0)} - D_{43}^{(1)} \cos \varphi^{(0)}] - [D_{11}^{(1)} N^{(0)} \cos \varphi^{(0)} - D_{23}^{(1)}] [D_{31}^{(1)} N^{(0)} - D_{41}^{(1)} \cos \varphi^{(0)}]}{[D_{11}^{(1)} N^{(0)} \cos \varphi^{(0)} + D_{21}^{(1)}] [D_{33}^{(1)} N^{(0)} - D_{43}^{(1)} \cos \varphi^{(0)}] - [D_{11}^{(1)} N^{(0)} \cos \varphi^{(0)} + D_{23}^{(1)}] [D_{31}^{(1)} N^{(0)} - D_{41}^{(1)} \cos \varphi^{(0)}]}, \quad (5.1.47)$$

$$r_{34} = \frac{[D_{11}^{(1)} N^{(0)} \cos \varphi^{(0)} + D_{21}^{(1)}] [D_{33}^{(1)} N^{(0)} + D_{43}^{(1)} \cos \varphi^{(0)}] - [D_{31}^{(1)} N^{(0)} \cos \varphi^{(0)} + D_{41}^{(1)}] [D_{11}^{(1)} N^{(0)} \cos \varphi^{(0)} + D_{21}^{(1)}]}{[D_{11}^{(1)} N^{(0)} \cos \varphi^{(0)} + D_{21}^{(1)}] [D_{33}^{(1)} N^{(0)} - D_{43}^{(1)} \cos \varphi^{(0)}] - [D_{11}^{(1)} N^{(0)} \cos \varphi^{(0)} + D_{23}^{(1)}] [D_{31}^{(1)} N^{(0)} - D_{41}^{(1)} \cos \varphi^{(0)}]}. \quad (5.1.48)$$

Stejným postupem s využitím relací (5.1.5) a (5.1.7) a matice rozhraní M (5.1.46) můžeme vyjádřit konverzní reflexní koeficienty v anizotropním prostředí (rozhraní izotropní–anizotropní) s polárním uspořádáním.

$$r_{14} = \frac{[D_{31}^{(1)} N^{(0)} + D_{41}^{(1)} \cos \varphi^{(0)}] [D_{33}^{(1)} N^{(0)} - D_{43}^{(1)} \cos \varphi^{(0)}] - [D_{33}^{(1)} N^{(0)} + D_{43}^{(1)} \cos \varphi^{(0)}] [D_{31}^{(1)} N^{(0)} - D_{41}^{(1)} \cos \varphi^{(0)}]}{[D_{11}^{(1)} N^{(0)} \cos \varphi^{(0)} + D_{21}^{(1)}] [D_{33}^{(1)} N^{(0)} - D_{43}^{(1)} \cos \varphi^{(0)}] - [D_{11}^{(1)} N^{(0)} \cos \varphi^{(0)} + D_{23}^{(1)}] [D_{31}^{(1)} N^{(0)} - D_{41}^{(1)} \cos \varphi^{(0)}]}, \quad (5.1.49)$$

$$r_{32} = \frac{[D_{11}^{(1)} N^{(0)} \cos \varphi^{(0)} + D_{21}^{(1)}] [D_{11}^{(1)} N^{(0)} \cos \varphi^{(0)} - D_{23}^{(1)}] - [D_{11}^{(1)} N^{(0)} \cos \varphi^{(0)} - D_{21}^{(1)}] [D_{11}^{(1)} N^{(0)} - D_{21}^{(1)} \cos \varphi^{(0)}]}{[D_{11}^{(1)} N^{(0)} \cos \varphi^{(0)} + D_{21}^{(1)}] [D_{33}^{(1)} N^{(0)} - D_{43}^{(1)} \cos \varphi^{(0)}] - [D_{11}^{(1)} N^{(0)} \cos \varphi^{(0)} + D_{23}^{(1)}] [D_{31}^{(1)} N^{(0)} - D_{41}^{(1)} \cos \varphi^{(0)}]}. \quad (5.1.50)$$

5.2 Charakteristická matice vazebního gapu

Při řešení problematiky specifikace charakteristické matice vazebního gapu je tato matice definována vztahem (bez indexování prostředí):

$$S = D P [D]^{-1}. \quad (5.2.1)$$

Pro popis jednotlivých členů matice S bude zapotřebí znát úhly šíření elektromagnetické vlny v daném prostředí. Vazebním gapem se rozumí oblast, kdy elektromagnetická vlna vykazuje na rozhraní úplný odraz, evanescentní vlna vstupuje do druhého prostředí a na následujícím rozhraní dochází k transferu do třetího prostředí. Typickým příkladem je aplikace vazebního hranolu pro generaci vedených vidů v planárním vlnovodu. Oblast mezi hranolem a vlnovodem je nazývána vazebním gapem a terminologicky se často hovoří o tunelovém efektu, který nastává mezi tímto hranolem a planární strukturou. Pro generaci evanescentní vlny v gapové oblasti je nutné, aby elektromagnetická vlna na hranolovou základnu dopadala pod úhlem větším, než je úhel kritický.

5.2.1 Úplný odraz na rozhraní

Pouze v rámci této subkapitoly si označme prostředí dopadající vlnou indexem (1) a prostředí, do kterého se láme vlna, indexem (2). Analogicky označíme indexy lomu n_1 a n_2 (předpokládáme nyní izotropní, bezetrátové prostředí). Aby mohlo dojít ve zvoleném směru $1 \rightarrow 2$ k úplnému odrazu, má platit:

$$n_1 > n_2. \quad (5.2.2)$$

Z podmínky spojitosti složek na rozhraní vyplývá

$$k_1 \sin \varphi_1 = k_2 \sin \varphi_2, \quad (5.2.3)$$

kde

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{\omega}{c} n_1, \\ k_2 &= \frac{\omega}{c} n_2. \end{aligned} \quad (5.2.4)$$

Označíme-li k_{2n} normálovou složku vlnového vektoru, můžeme psát

$$k_{2n}^2 = k_2^2 - k_{2t}^2 = k_2^2 - k_2^2 \sin^2 \varphi_2, \quad (5.2.5)$$

S využitím (5.2.3) dostáváme:

$$k_{2n}^2 = k_2^2 - k_1^2 \sin^2 \varphi_1. \quad (5.2.6)$$

Dalším dosazením z relace (5.2.4):

$$k_{2n}^2 = k_2^2 - \left(\frac{\omega}{c} n_1 \right)^2 \sin^2 \varphi_1 = k_2^2 - \left(\frac{\omega}{c} n_2 \right)^2 \left(\frac{n_1}{n_2} \right)^2 \sin^2 \varphi_1. \quad (5.2.7)$$

Úpravou a aplikací (5.2.4) vychází:

$$k_{2n}^2 = k_2^2 \left[1 - \left(\frac{n_1}{n_2} \right)^2 \sin^2 \varphi_1 \right] = k_2^2 \cos^2 \varphi_2. \quad (5.2.8)$$

Dostáváme tedy, že

$$\cos \varphi_2 = \left[1 - \left(\frac{n_1}{n_2} \right)^2 \sin^2 \varphi_1 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (5.2.9)$$

Nad kritickým úhlem (pro úplný odraz) je tedy $\cos \varphi_2$ ryze imaginární. Pro další úvahy je vhodná následující úvaha. Úpravou (5.58) dostáváme (uvažujeme případ úplného odrazu):

$$k_{2n}^2 = -k_2^2 \left[\left(\frac{n_1}{n_2} \right)^2 \sin^2 \varphi_1 - 1 \right]. \quad (5.2.10)$$

Ze Snellova zákona lomu vyplývá

$$\frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_2} = \frac{n_2}{n_1}. \quad (5.2.11)$$

Pro kritický úhel $\varphi_1 = \varphi_c$ platí, že $\varphi_2 = 90^\circ$ a tedy

$$\sin \varphi_2 = 1. \quad (5.2.12)$$

Na základě relací (5.2.11) a (5.2.12) tedy můžeme psát

$$\sin\varphi_c = \frac{n_2}{n_1}. \quad (5.2.13)$$

Aplikací relace (5.2.13) v relaci (5.2.10) vychází

$$k_{2n}^2 = -k_2^2 \left[\left(\frac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi_c} \right)^2 - 1 \right] = -K^2, \quad (5.2.14)$$

kde $K > 0$ (pro úplný odraz $\sin\varphi_1 > \sin\varphi_c$). Odmocněním vztahu (5.2.14) dostáváme

$$k_{2n} = \pm iK, \quad (5.2.15)$$

a dosazením do výrazu zachycujícího šíření vlny v prostoru

$$e^{ik_{2n}z} = e^{\mp Kz}. \quad (5.2.16)$$

Protože předpokládáme postup vlny v kladném smyslu osy z vyloučíme kladné znaménko (+) v exponentu vedoucí k exponenciálně rostoucí vlně a vybereme tedy na základě vztahů (5.2.15) a (5.2.16):

$$\begin{aligned} k_{2n} &= iK, \\ ik_{2n} &= -K. \end{aligned} \quad (5.2.17)$$

Z relace (5.2.10) tedy vyplývá:

$$K = k_2 \left[\left(\frac{n_1}{n_2} \right)^2 \sin^2\varphi_1 - 1 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (5.2.18)$$

Poněvadž

$$k_{2n} = k_2 \cos\varphi_2, \quad (5.2.19)$$

můžeme pomocí rovnic (5.2.17) a (5.2.18) vyjádřit

$$\cos\varphi_2 = i \left[\left(\frac{n_1}{n_2} \right)^2 \sin^2\varphi_1 - 1 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (5.2.20)$$

5.2.2 Charakteristická matice vazebního gapu

Při specifikaci charakteristické matice vycházíme z definičního vztahu (5.2.1). Jak již bylo uvedeno výše, nebudeme nyní indexovat z důvodu jednoduchosti prostředí. V dynamických maticích relace (5.2.1) využijeme vztahu (5.2.20). V matici propagační je příčná konstanta šíření β definována vztahem:

$$\beta = \frac{\omega}{c} N i \left[\left(\frac{n_p}{N} \right)^2 \sin^2\varphi_p - 1 \right]^{\frac{1}{2}} t, \quad (5.2.21)$$

kde jsme označili n_p jako index lomu prostředí, kde dochází k úplnému odrazu (nejčastěji se používá jako vazebního prvku hranolu a proto n_p), N reprezentuje index lomu prostředí gapu, φ_p je úhel dopadu rovinné vlny na kontaktní plochu hranolu (vůči normále). t je tloušťka vazebního gapu. Stejnou symboliku využíváme i při dosazení do dynamických matic ($\cos\varphi$). S využitím vztahů (5.2.4) a (5.2.5) až (5.2.10) můžeme charakteristickou matici S vazebního gapu vyjádřit ve tvaru:

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} \end{bmatrix}, \quad (5.2.22)$$

kde

$$S_{11} = S_{22} = S_{33} = S_{44} = \frac{1}{2} (e^{i\beta} + e^{-i\beta}), \quad (5.2.23)$$

$$S_{12} = \frac{1}{2} \frac{e^{i\beta} - e^{-i\beta}}{N \cos\varphi}, \quad (5.2.24)$$

$$S_{13} = S_{14} = S_{23} = S_{24} = S_{31} = S_{32} = S_{41} = S_{42} = 0, \quad (5.2.25)$$

$$S_{21} = \frac{1}{2} (N \cos\varphi e^{i\beta} - N \cos\varphi e^{-i\beta}), \quad (5.2.26)$$

$$S_{34} = \frac{1}{2} \left(-\frac{\cos\varphi}{N} e^{i\beta} + \frac{\cos\varphi}{N} e^{-i\beta} \right), \quad (5.2.27)$$

$$S_{43} = \frac{1}{2} \left(-\frac{N}{\cos\varphi} e^{i\beta} + \frac{N}{\cos\varphi} e^{-i\beta} \right). \quad (5.2.28)$$

V experimentální praxi je velmi často vazební gap tvořen vzduchovou mezerou. V tomto případě můžeme úhel lomu, příčnou konstantu šíření a prvky matice S vyjádřit ve tvaru:

$$\cos\varphi = i [(n_P)^2 \sin\varphi_P - 1]^{\frac{1}{2}}, \quad (5.2.29)$$

$$\beta = i \frac{\omega}{c} [(n_P)^2 \sin\varphi_P - 1]^{\frac{1}{2}} t \quad (5.2.30)$$

$$S_{11} = S_{22} = S_{33} = S_{44} = \frac{1}{2} (e^{i\beta} + e^{-i\beta}), \quad (5.2.31)$$

$$S_{12} = \frac{1}{2} \frac{e^{i\beta} - e^{-i\beta}}{\cos\varphi}, \quad (5.2.32)$$

$$S_{13} = S_{14} = S_{23} = S_{24} = S_{31} = S_{32} = S_{41} = S_{42} = 0, \quad (5.2.33)$$

$$S_{21} = \frac{1}{2} (\cos\varphi e^{i\beta} - \cos\varphi e^{-i\beta}), \quad (5.2.34)$$

$$S_{34} = \frac{1}{2} (-\cos\varphi e^{i\beta} + \cos\varphi e^{-i\beta}), \quad (5.2.35)$$

$$S_{43} = \frac{1}{2} \left(-\frac{e^{i\beta}}{\cos\varphi} + \frac{e^{-i\beta}}{\cos\varphi} \right). \quad (5.2.36)$$

Jestliže si označíme

$$\beta = iA, \quad (5.2.37)$$

kde

$$A = \frac{\omega}{c} [(n_P)^2 \sin \varphi_P - 1]^{\frac{1}{2}} t, \quad (5.2.38)$$

Potom můžeme prvky charakteristické matice S vyjádřit (pro vzduchový gap) ve tvaru:

$$S_{11} = S_{22} = S_{33} = S_{44} = \frac{1}{2} (e^{-A} + e^A) = \cosh(A), \quad (5.2.39)$$

$$S_{12} = \frac{1}{2} \frac{e^{-A} - e^A}{\cos \varphi} = -\frac{\sinh(A)}{\cos \varphi}, \quad (5.2.40)$$

$$S_{13} = S_{14} = S_{23} = S_{24} = S_{31} = S_{32} = S_{41} = S_{42} = 0, \quad (5.2.41)$$

$$S_{21} = \frac{1}{2} (\cos \varphi e^{-A} - \cos \varphi e^A) = -\cos \varphi \sinh(A), \quad (5.2.42)$$

$$S_{34} = \frac{1}{2} (-\cos \varphi e^{-A} + \cos \varphi e^A) = \cos \varphi \sinh(A), \quad (5.2.43)$$

$$S_{43} = \frac{1}{2} \left(-\frac{e^{-A}}{\cos \varphi} + \frac{e^A}{\cos \varphi} \right) = \frac{1}{\cos \varphi} \sinh(A). \quad (5.2.44)$$

Jestliže si označíme (viz (1.2.29))

$$\cos \varphi = iB, \quad (5.2.45)$$

kde

$$B = [(n_P)^2 \sin \varphi_P - 1]^{\frac{1}{2}}, \quad (5.2.46)$$

potom

$$S_{11} = S_{22} = S_{33} = S_{44} = \cosh(A), \quad (5.2.47)$$

$$S_{12} = \frac{i \sinh(A)}{B}, \quad (5.2.48)$$

$$S_{13} = S_{14} = S_{23} = S_{24} = S_{31} = S_{32} = S_{41} = S_{42} = 0, \quad (5.2.49)$$

$$S_{21} = -iB \sinh(A), \quad (5.2.50)$$

$$S_{34} = iB \sinh(A), \quad (5.2.51)$$

$$S_{43} = -\frac{i \sinh(A)}{B}. \quad (5.2.52)$$

5.3 Charakteristická matice anizotropního vazebního gapu v transverzální konfiguraci

Kapitole 5.2 byla odvozena charakteristická matice izotropního vazebního gapu. Pro z složku vlnového vektoru (v naší souřadné soustavě kolmá k rozhraní) bylo specifikováno (relace 5.2.17):

$$k_z^{(2)} = iK^{(2)}, \quad (5.3.1)$$

kde $K > 0$. Pro směrový kosinus v bezeztrátovém a izotropním prostředí platí (viz např. 5.2.9):

$$\cos \varphi^{(2)} = \left[1 - \left(\frac{n_1}{n_2} \right)^2 \sin^2 \varphi^{(1)} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (5.3.2)$$

Pro úhly dopadu větší než je úhel kritický, je tento směrový kosinus ryze imaginární (viz (5.2.20)). Při šíření elektromagnetických vln v anizotropních prostředích vycházíme z řešení vlnové rovnice, kdy hledáme kořeny N_{zj} . Pomocí komplexních směrových kosinů můžeme psát

$$N_{zj}^{(2)} = N^{(2)} \cos \varphi_j^{(2)}. \quad (5.3.3)$$

V případě izotropního dielektrika platí (s využitím 5.3.1):

$$N_z^{(2)} = \frac{c}{\omega} k_z^{(2)} = i \frac{c}{\omega} K^{(2)}. \quad (5.3.4)$$

a tedy veličina $N_z^{(2)}$ je ryze imaginární.

Pro případ izotropních gapů tedy směrové kosiny–vzhledem k (5.2.20)–vynásobíme imaginární jednotkou i . Tento proces se nám potom promítne i do specifikace kořenů N_{zj} . Ty můžeme určit tak, že řešíme vlnovou rovnici pro příslušný typ anizotropie a získané kořeny N_{zj} pro určení charakteristické matice vazebního gapu vynásobíme, vzhledem k relacím (5.3.3) a (5.3.4), imaginární jednotkou.

5.3.1 Charakteristická matice vazebního anizotropního gapu s transverzálním uspořádáním

Pro charakteristickou matici anizotropní vrstvy s transverzální konfigurací jsme odvodili (nebudeme používat indexování prostředí):

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_0 & S_0 \\ S_{21} & S_{22} & S_0 & S_0 \\ S_0 & S_0 & S_{33} & S_{34} \\ S_0 & S_0 & S_{43} & S_{44} \end{bmatrix}, \quad (5.3.5)$$

kde

$$\begin{aligned}
S_{11} &= \left(L_{11}e^{i\beta^+} + L_{11}e^{-i\beta^+} \right) |D|^{-1}, \\
S_{12} &= \left(-L_{12}e^{i\beta^+} + L_{12}e^{-i\beta^+} \right) |D|^{-1}, \\
S_{21} &= \left(D_{21}L_{11}e^{i\beta^+} - D_{21}L_{11}e^{-i\beta^+} \right) |D|^{-1}, \\
S_{22} &= \left(-D_{21}L_{12}e^{i\beta^+} - D_{21}L_{12}e^{-i\beta^+} \right) |D|^{-1}, \\
S_{33} &= \left(D_{33}L_{33}e^{i\beta^-} + D_{33}L_{43}e^{-i\beta^-} \right) |D|^{-1}, \\
S_{34} &= \left(D_{33}L_{34}e^{i\beta^-} - D_{33}L_{34}e^{-i\beta^-} \right) |D|^{-1}, \\
S_{43} &= \left(D_{43}L_{33}e^{i\beta^-} + D_{44}L_{43}e^{-i\beta^-} \right) |D|^{-1}, \\
S_{44} &= \left(D_{43}L_{34}e^{i\beta^-} - D_{44}L_{34}e^{-i\beta^-} \right) |D|^{-1}.
\end{aligned} \tag{5.3.6}$$

Dosazením z relací (5.2.34) a (5.2.36) do vztahů (5.3.6) a úpravou dostáváme:

$$\begin{aligned}
S_{11} &= \frac{e^{i\beta^+} + e^{-i\beta^+}}{2}, \\
S_{12} &= \frac{1}{N_{z1}} \frac{e^{i\beta^+} - e^{-i\beta^+}}{2}, \\
S_{21} &= \frac{1}{N_{z1}} \frac{e^{i\beta^+} - e^{-i\beta^+}}{2}, \\
S_{22} &= \frac{e^{i\beta^+} + e^{-i\beta^+}}{2}, \\
S_{34} &= \frac{\varepsilon_0 - N_y^2}{N_{z4}\varepsilon_0} \frac{e^{i\beta^-} - e^{-i\beta^-}}{2}, \\
S_{33} &= \frac{e^{i\beta^-} + e^{-i\beta^-}}{2} + \frac{iN_y\varepsilon_1}{N_{z3}\varepsilon_0} \frac{e^{i\beta^-} - e^{-i\beta^-}}{2}, \\
S_{43} &= \frac{-N_{z3}\varepsilon_0}{(\varepsilon_0 - N_y^2)} \frac{e^{i\beta^-} - e^{-i\beta^-}}{2} - \frac{N_y^2\varepsilon_1^2}{(\varepsilon_0 - N_y^2)N_{z3}\varepsilon_0} \frac{e^{i\beta^-} - e^{-i\beta^-}}{2}, \\
S_{44} &= \frac{e^{i\beta^-} + e^{-i\beta^-}}{2} + \frac{iN_y\varepsilon_1}{N_{z4}\varepsilon_0} \frac{e^{i\beta^-} - e^{-i\beta^-}}{2}.
\end{aligned} \tag{5.3.7}$$

Pro totální odraz můžeme psát:

$$\begin{aligned}
N_{z1t} &= iN_{z1}, \\
N_{z2t} &= iN_{z2}, \\
N_{z3,4t} &= iN_{z3,4}, \\
\beta_t^\pm &= i\beta^\pm, \\
\beta^+ &= \frac{\omega}{c}N_{z1}t, \\
\beta^- &= \frac{\omega}{c}N_{z3}t.
\end{aligned}
\tag{5.3.8}$$

Dosadíme-li výrazy (5.3.8) do prvků charakteristické matice (5.3.7) dostáváme:

$$\begin{aligned}
S_{11} &= \frac{e^{-\beta^+} + e^{\beta^+}}{2} = \cosh(\beta^+), \\
S_{12} &= \frac{1}{iN_{z1}} \frac{e^{-\beta^+} - e^{\beta^+}}{2} = -\frac{1}{iN_{z1}} \frac{e^{\beta^+} - e^{-\beta^+}}{2} = \frac{i}{N_{z1}} \sinh(\beta^+), \\
S_{21} &= iN_{z1} \frac{e^{-\beta^+} - e^{\beta^+}}{2} = -iN_{z1} \frac{e^{\beta^+} - e^{-\beta^+}}{2} = \frac{N_{z1}}{i} \sinh(\beta^+), \\
S_{22} &= \frac{e^{-\beta^+} + e^{\beta^+}}{2} \cosh(\beta^+), \\
S_{33} &= \frac{e^{-\beta^-} + e^{\beta^-}}{2} + \frac{iN_y \varepsilon_1}{N_{z3} \varepsilon_0} \frac{e^{-i\beta^-} - e^{i\beta^-}}{2} = \cosh(\beta^-) - \frac{N_y \varepsilon_1}{N_{z3} \varepsilon_0} \sinh(\beta^-), \\
S_{34} &= \frac{\varepsilon_0 - N_y^2}{iN_{z4} \varepsilon_0} \frac{e^{-\beta^-} - e^{\beta^-}}{2} = -\frac{\varepsilon_0 - N_y^2}{iN_{z4} \varepsilon_0} \frac{e^{-\beta^-} - e^{\beta^-}}{2} = \frac{i(\varepsilon_0 - N_y^2)}{N_{z4} \varepsilon_0} \sinh(\beta^-), \\
S_{43} &= \frac{-iN_{z3} \varepsilon_0}{\varepsilon_0 - N_y^2} \frac{e^{-\beta^-} - e^{\beta^-}}{2} - \frac{N_y^2 \varepsilon_1^2}{(\varepsilon_0 - N_y^2) iN_{z3} \varepsilon_0} \frac{e^{-\beta^-} - e^{\beta^-}}{2} =, \\
&= \frac{iN_{z3} \varepsilon_0}{\varepsilon_0 - N_y^2} \sinh(\beta^-) + \frac{N_y^2 \varepsilon_1^2}{(\varepsilon_0 - N_y^2) iN_{z3} \varepsilon_0} \sinh(\beta^-), \\
S_{44} &= \frac{e^{-\beta^-} + e^{\beta^-}}{2} + \frac{iN_y \varepsilon_1}{iN_{z4} \varepsilon_0} \frac{e^{-\beta^-} - e^{\beta^-}}{2} = \\
&= \cosh(\beta^+) - \frac{N_y \varepsilon_1}{N_{z4} \varepsilon_0} \sinh(\beta^-).
\end{aligned}
\tag{5.3.9}$$

Při řadě výpočtů se ukazuje výhodným používat ultratenkou aproximaci:

$$\begin{aligned}
\cosh(\beta^\pm) &= 1, \\
\sinh(\beta^\pm) &= \beta^\pm.
\end{aligned}
\tag{5.3.10}$$

Dosadíme-li tuto aproximaci (5.3.10) do prvků charakteristické matice S (5.3.9), dostáváme:

$$\begin{aligned}
S_{11} &= 1, \\
S_{12} &= \frac{i\beta^+}{N_{z1}}, \\
S_{21} &= \frac{N_{z1}}{i}\beta^+, \\
S_{22} &= 1, \\
S_{33} &= 1 - \frac{N_y\varepsilon_1}{N_{z3}\varepsilon_0}\beta^-, \\
S_{34} &= \frac{i(\varepsilon_0 - N_y^2)}{N_{z4}\varepsilon_0}\beta^-, \\
S_{43} &= \frac{iN_{z3}\varepsilon_0}{\varepsilon_0 - N_y^2}\beta^- + \frac{N_y^2\varepsilon_1^2}{(\varepsilon_0 - N_y^2)iN_{z3}\varepsilon_0}\beta^-, \\
S_{44} &= 1 - \frac{N_y\varepsilon_1}{N_{z4}\varepsilon_0}\beta^-.
\end{aligned} \tag{5.3.11}$$

Z relace (25.30) vyplývá

$$N_{z4} = -N_{z3}. \tag{5.3.12}$$

Můžeme tedy poslední dva prvky charakteristické matice S upravit:

$$\begin{aligned}
S_{34} &= \frac{i(\varepsilon_0 - N_y^2)}{N_{z3}\varepsilon_0}\beta^- = \frac{(\varepsilon_0 - N_y^2)}{iN_{z3}\varepsilon_0}, \\
S_{44} &= 1 - \frac{N_y\varepsilon_1}{N_{z3}\varepsilon_0}\beta^- = 1 + \frac{N_y\varepsilon_1}{N_{z3}\varepsilon_0}\beta^-.
\end{aligned} \tag{5.3.13}$$

Označme:

$$\begin{aligned}
a &= \frac{(\varepsilon_0 - N_y^2)}{iN_{z3}\varepsilon_0}, \\
b &= \frac{N_y\varepsilon_1}{N_{z3}\varepsilon_0}.
\end{aligned} \tag{5.3.14}$$

Potom prvky matice S (5.3.11) můžeme vyjádřit ve tvaru:

$$\begin{aligned}
S_{11} &= 1, \\
S_{12} &= \frac{i\beta^+}{N_{z1}}, \\
S_{21} &= \frac{N_{z1}}{i}\beta^+, \\
S_{22} &= 1, \\
S_{33} &= 1 - b\beta^-, \\
S_{34} &= a\beta^-, \\
S_{43} &= \frac{\beta^-}{a} + \frac{N_y \varepsilon_1}{i(\varepsilon_0 - N_y^2)} b\beta^-, \\
S_{44} &= 1 + b\beta^-.
\end{aligned} \tag{5.3.15}$$

Matici S potom souhrnně můžeme vyjádřit ve tvaru:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & \frac{i\beta^+}{N_{z1}} & 0 & 0 \\ \frac{N_{z1}}{i}\beta^+ & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - b\beta^- & a\beta^- \\ 0 & 0 & \frac{\beta^-}{a} + \frac{N_y \varepsilon_1}{i(\varepsilon_0 - N_y^2)} b\beta^- & 1 + b\beta^- \end{bmatrix}. \tag{5.3.16}$$

Matici S , která je dána prvky (5.3.9), lze využít při analýze vazebních podmínek při aplikaci ATR metody. Z jejich prvků lze stanovit při dané planární vlnovodné struktuře pozici synchronních úhlů, úhlovou pozici dopadajícího svazku při generaci povrchových plazmatů atd. V řadě aplikací je výhodné použít matici S , která byla realizována pro ultratenkou aproximaci (5.3.16) např. při studiu silných vazeb.

5.4 Vyjádření tunelového efektu pomocí charakteristických matic

Budeme uvažovat strukturu vazební hranol-index (p), gap (g), poloprostor transferu vlny (1). Celkovou situaci můžeme vyjádřit pomocí komplexní matice systému M , která v našem případě má tvar (nezahrnujeme normalizační matice hranolu a prostředí (1)):

$$M = [D^{(p)}]^{-1} D^{(g)} P^{(g)} [D^{(g)}]^{-1} D^{(1)}. \tag{5.4.1}$$

Dílčí výraz v relaci (5.4.1)

$$S^{(g)} = D^{(g)} P^{(g)} [D^{(g)}]^{-1} \tag{5.4.2}$$

označíme jako charakteristikou matici vazebního gapu.

5.4.1 Charakteristická matice izotropního gapu

Pro vyjádření charakteristické matice izotropního gapu vyjdeme z analýz kapitoly 5.2. Na základě vztahu (5.2.20) (s jiným indexováním prostředí) můžeme psát

$$\cos\varphi^{(g)} = \mathrm{i} \left[\left(\frac{N^{(p)}}{N^{(g)}} \right)^2 \sin^2\varphi^{(p)} - 1 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (5.4.3)$$

Relaci (5.2.11) vyjádříme ve tvaru:

$$\beta = \mathrm{i} \frac{\omega}{c} N^{(g)} \left[\left(\frac{N^{(p)}}{N^{(g)}} \right)^2 \sin^2\varphi^{(p)} - 1 \right]^{\frac{1}{2}} t. \quad (5.4.4)$$

Označme si (ve vztahu (5.4.4)):

$$\beta = \mathrm{i} A, \quad (5.4.5)$$

kde

$$A = \frac{\omega}{c} N^{(g)} \left[\left(\frac{N^{(p)}}{N^{(g)}} \right)^2 \sin^2\varphi^{(p)} - 1 \right]^{\frac{1}{2}} t. \quad (5.4.6)$$

Potom prvky charakteristické matice S (viz 5.2.39) nabývají tvaru:

$$\begin{aligned} S_{11} &= S_{22} = S_{33} = S_{44} = \cosh(A), \\ S_{12} &= -\frac{\sinh(A)}{N^{(g)} \cos\varphi^{(g)}}, \\ S_{13} &= S_{14} = S_{23} = S_{24} = S_{31} = S_{32} = S_{41} = S_{42} = 0, \\ S_{21} &= -N^{(g)} \cos\varphi^{(g)} \sinh(A), \\ S_{34} &= \frac{\cos\varphi^{(g)}}{N^{(g)}} \sinh(A), \\ S_{43} &= \frac{N^{(g)}}{\cos\varphi^{(g)}} \sinh(A). \end{aligned} \quad (5.4.7)$$

Dále si označme

$$\cos\varphi^{(g)} = \mathrm{i} B, \quad (5.4.8)$$

kde

$$B = \left[\left(\frac{N^{(p)}}{N^{(g)}} \right)^2 \sin^2\varphi^{(p)} - 1 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (5.4.9)$$

Potom prvky charakteristické matice S nabývají tvaru:

$$\begin{aligned}
S_{11} &= S_{22} = S_{33} = S_{44} = \cosh(A), \\
S_{12} &= -\frac{\sinh(A)}{N^{(g)}iB} = \frac{i\sinh(A)}{N^{(g)}B}, \\
S_{13} &= S_{14} = S_{23} = S_{24} = S_{31} = S_{32} = S_{41} = S_{42} = 0, \\
S_{21} &= -iN^{(g)}B\sinh(A), \\
S_{34} &= \frac{iB}{N^{(g)}}\sinh(A), \\
S_{43} &= \frac{N^{(g)}}{iB}\sinh(A) = -\frac{iN^{(g)}}{B}\sinh(A).
\end{aligned} \tag{5.4.10}$$

Matici S tedy můžeme vyjádřit ve tvaru:

$$S^{(g)} = \begin{bmatrix} \cosh(A) & \frac{i\sinh(A)}{N^{(g)}B} & 0 & 0 \\ -iN^{(g)}B\sinh(A) & \cosh(A) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cosh(A) & \frac{iB\sinh(A)}{N^{(g)}} \\ 0 & 0 & -\frac{iN^{(g)}\sinh(A)}{B} & \cosh(A) \end{bmatrix}. \tag{5.4.11}$$

Pro případ ultratenké aproximace můžeme psát:

$$\begin{aligned}
\cosh(A) &= 1, \\
\sinh(A) &= A.
\end{aligned} \tag{5.4.12}$$

Z relací (5.4.7) a (5.4.9) vyplývá :

$$\frac{A}{B} = \frac{\omega}{c}N^{(g)}t. \tag{5.4.13}$$

Pro tuto aproximaci tedy charakteristická matice S potom nabývá tvaru (viz (5.4.11)):

$$S^{(g)} = \begin{bmatrix} 1 & i\frac{\omega}{c}t & 0 & 0 \\ -iN^{(g)}AB & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{iAB}{N^{(g)}} \\ 0 & 0 & -i(N^{(g)})^2\frac{\omega}{c}t & 1 \end{bmatrix}, \tag{5.4.14}$$

kde jsme na základě vztahů (5.4.10), (5.4.12) a (5.4.13) provedli úpravu:

$$\begin{aligned}
S_{12} &= \frac{i\sinh(A)}{N^{(g)}B} = \frac{iA}{N^{(g)}B} = i\frac{\omega}{c}t, \\
S_{21} &= -iN^{(g)}B\sinh(A) = -iN^{(g)}AB, \\
S_{34} &= \frac{iB\sinh(A)}{N^{(g)}} = \frac{iAB}{N^{(g)}}, \\
S_{43} &= \frac{iN^{(g)}\sinh(A)}{B} = -i(N^{(g)})^2\frac{\omega}{c}t.
\end{aligned} \tag{5.4.15}$$

Frekvenčním vazebním médiem je vzduch. V tomto případě:

$$N^{(g)} = 1 \tag{5.4.16}$$

a charakteristická matice vazebního gapu potom nabývá tvaru:

$$S^{(g)} = \begin{bmatrix} \cosh(A) & \frac{\text{isinh}(A)}{B} & 0 & 0 \\ -iB\sinh(A) & \cosh(A) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cosh(A) & iB\sinh(A) \\ 0 & 0 & -\frac{\text{isinh}(A)}{B} & \cosh(A) \end{bmatrix}. \quad (5.4.17)$$

Jestliže navíc uplatníme ultratenkou aproximaci, dostáváme (pro vzduchový gap):

$$S^{(g)} = \begin{bmatrix} 1 & i\frac{\omega}{c}t & 0 & 0 \\ -iAB & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & iAB \\ 0 & 0 & -i\frac{\omega}{c}t & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.4.18)$$

U prvků charakteristických matic (5.4.17) a (5.4.18) dosadíme ve vztazích pro A, B (5.4.6) a (5.4.7) hodnotu indexu lomu prostředí gapu rovnou jedné (5.4.16).

5.4.2 Charakteristická matice anizotropního gapu–transverzální uspořádání

Tato charakteristická matice byla odvozena v kapitole 5.3–viz prvky (5.4.9):

$$S^{(g)} = \begin{bmatrix} \cosh(\beta^+) & \frac{\text{isinh}(\beta^+)}{N_{z1}^{(g)}} & 0 & 0 \\ \frac{N_{z1}^{(g)} \sinh(\beta^+)}{i} & \cosh(\beta^+) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cosh(\beta^-) - \frac{N_y \varepsilon_1^{(g)}}{N_{z3}^{(g)} \varepsilon_0^{(g)}} \sinh(\beta^-) & \frac{i(\varepsilon_0^{(g)} - N_y^2) \sinh(\beta^-)}{N_{z4}^{(g)} \varepsilon_0^{(g)}} \\ 0 & 0 & \frac{iN_{z3}^{(g)} \varepsilon_0^{(g)} \sinh(\beta^-)}{\varepsilon_0^{(g)} - N_y^2} + \frac{N_y^2 \varepsilon_1^{(g)^2} \sinh(\beta^-)}{(\varepsilon_0^{(g)} - N_y^2) i N_{z3}^{(g)} \varepsilon_0^{(g)}} & \cosh(\beta^-) - \frac{N_y \varepsilon_1^{(g)} \sinh(\beta^-)}{N_{z4}^{(g)} \varepsilon_0^{(g)}} \end{bmatrix} \quad (5.4.19)$$

kde (viz kapitola 5.3):

$$\begin{aligned} \beta^+ &= \frac{\omega}{c} N_{z1}^{(g)} t, \\ \beta^- &= \frac{\omega}{c} N_{z3}^{(g)} t, \\ N_{z1}^{(g)} &= \left(\varepsilon_0^{(g)} - N_y^2 \right), \\ N_{z2}^{(g)} &= -N_{z1}^{(g)}, \\ N_{z3}^{(g)} &= \left(2\varepsilon_0^{(g)} \right)^{-1} \left\{ + \left[4\varepsilon_0^{(g)^2} \left(\varepsilon_0^{(g)} - N_y^2 \right) - 4\varepsilon_1^{(g)^2} \varepsilon_0^{(g)} \right]^{\frac{1}{2}} \right\}, \\ N_{z4}^{(g)} &= -N_{z3}^{(g)}. \end{aligned} \quad (5.4.20)$$

Pro ultratenkou aproximaci můžeme charakteristickou matici gapu v transversální geometrii zapsat ve tvaru (viz (5.4.16)):

$$S^{(g)} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{i\beta^+}{N_{z1}^{(g)}} & 0 & 0 \\ \frac{N_{z1}^{(g)}\beta^+}{i} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - b\beta^- & a\beta^- \\ 0 & 0 & \frac{\beta^-}{a} + \frac{N_y\varepsilon_1^{(g)}}{i(\varepsilon_0^{(g)} - N_y^2)}b\beta^- & 1 + b\beta^- \end{bmatrix}, \quad (5.4.21)$$

kde

$$a = \frac{(\varepsilon_0^{(g)} - N_y^2)}{iN_{z3}^{(g)}\varepsilon_0^{(g)}}, \quad b = \frac{N_y\varepsilon_1^{(g)}}{N_{z3}^{(g)}\varepsilon_0^{(g)}}. \quad (5.4.22)$$

5.4.3 Tunelový efekt vazebním gapem

Tunelový efekt můžeme popsat relací (5.4.1). V dalším, pro zjednodušení zápisu, označíme

$$S = S^{(g)} = D^{(g)}P^{(g)}[D^{(g)}]^{-1}, \quad (5.4.23)$$

s tím, že za nenulové členy matice $S_{11}, S_{12}, S_{21}, S_{22}, S_{33}, S_{34}, S_{43}, S_{44}$ dosadíme, buď ze vztahů (5.4.10) pro izotropní prostředí, nebo použijeme zápisu (5.4.14) (izotropní prostředí s ultratenkou aproximací) nebo (5.4.17) (vzduchový gap), nebo (5.4.18) (vzduchový gap v ultratenké aproximaci), nebo (5.4.19) a (5.4.20) (anizotropní transversální uspořádání gapu), nebo (5.4.21) a (5.4.22) (anizotropní transversální uspořádání v ultratenké aproximaci).

Pro specifikaci tunelového efektu (relace (5.4.1)) potřebujeme určit matice $[D^{(p)}]^{-1}$ a $D^{(1)}$:

$$[D^{(p)}]^{-1} = [2N^{(p)}\cos\varphi^{(p)}]^{-1} \begin{bmatrix} N^{(p)}\cos\varphi^{(p)} & 1 & 0 & 0 \\ N^{(p)}\cos\varphi^{(p)} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N^{(p)} & -\cos\varphi^{(p)} \\ 0 & 0 & N^{(p)} & \cos\varphi^{(p)} \end{bmatrix}, \quad (5.4.24)$$

$$D^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ N^{(1)}\cos\varphi^{(1)} & -N^{(1)}\cos\varphi^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\varphi^{(1)} & \cos\varphi^{(1)} \\ 0 & 0 & -N^{(1)} & N^{(1)} \end{bmatrix}. \quad (5.4.25)$$

Ve vztazích (5.4.24) a (5.4.25) jsme předpokládali, že prostředí (p) a (1) jsou dielektrická a izotropní. Na základě relace (5.4.1) můžeme vyjádřit celkovou matici M systému vazební hranol-gap-dielektrický izotropní poloprostor:

$$M = [2N^{(p)}\cos\varphi^{(p)}]^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} S_{11}N^{(p)}\cos\varphi^{(p)} + S_{21} + N^{(1)}\cos\varphi^{(1)}(S_{12}N^{(p)}\cos\varphi^{(p)} + S_{22}) & S_{11}N^{(p)}\cos\varphi^{(p)} + S_{21} - N^{(1)}\cos\varphi^{(1)}(S_{12}N^{(p)}\cos\varphi^{(p)} + S_{22}) & 0 & 0 \\ S_{11}N^{(p)}\cos\varphi^{(p)} - S_{21} + N^{(1)}\cos\varphi^{(1)}(S_{12}N^{(p)}\cos\varphi^{(p)} - S_{22}) & S_{11}N^{(p)}\cos\varphi^{(p)} - S_{21} - N^{(1)}\cos\varphi^{(1)}(S_{12}N^{(p)}\cos\varphi^{(p)} - S_{22}) & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cos\varphi^{(1)}(S_{33}N^{(p)} - S_{43}\cos\varphi^{(p)}) - N^{(1)}(S_{34}N^{(p)} - S_{44}\cos\varphi^{(p)}) & \cos\varphi^{(1)}(S_{33}N^{(p)} - S_{43}\cos\varphi^{(p)}) + N^{(1)}(S_{34}N^{(p)} - S_{44}\cos\varphi^{(p)}) \\ 0 & 0 & \cos\varphi^{(1)}(S_{33}N^{(p)} + S_{43}\cos\varphi^{(p)}) - N^{(1)}(S_{34}N^{(p)} + S_{44}\cos\varphi^{(p)}) & \cos\varphi^{(1)}(S_{33}N^{(p)} + S_{43}\cos\varphi^{(p)}) + N^{(1)}(S_{34}N^{(p)} + S_{44}\cos\varphi^{(p)}) \end{bmatrix} \quad (5.4.26)$$

Vidíme tedy, že celková matice systému v našem případě se dá vyjádřit ve tvaru:

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & 0 & 0 \\ M_{21} & M_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_{33} & M_{34} \\ 0 & 0 & M_{43} & M_{44} \end{bmatrix}. \quad (5.4.27)$$

Konkrétní vyjádření jednotlivých prvků matice M , jak je uvedeno výše, závisí na charakteru vazebního gapu (izotropní, anizotropní) a jeho geometrii (standardní tloušťka, ultratenký gap). Z této skutečnosti potom také vyplývají příslušné reflexní a transmisní koeficienty pro zkoumanou strukturu.