Kapitola 4

Anisotropní multivrstvy

4.1 Úvod

Odezva anizotropních multivrstev na elektromagnetické vlny získává značnou pozornost související s praktickým uplatněním nanostruktur v optoelektronice, elektrooptice, magnetooptice, v optickém záznamu informace ap. Tato kapitola je věnována obecnému vyšetření odezvy anizotropních multivrstev na elektromagnetické vlny. K tomu využijeme zobecnění Yehova formalizmu [1] na absorbující prostředí [2, 3, 4]. Řada jednodušších situací je zahrnuta jako speciální případy. Formalizmus neklade žádná omezení na tenzor permitivity, který chápeme jako funkci polohy na ose kolmé k rovinám rozhraní vrstev.

Geometrie problému je následující. Planární struktura je tvořena $\mathcal{N}$ vrstvami oddělenými navzájem rovnoběžnými rovinami rozhraní, které jsou všechny kolmé na společnou osu. Struktura je umístěna mezi dvěma poloprostory. Každá z vrstev je homogenní a charakterizovaná obecným komplexním tenzorem relativní permitivity $\varepsilon^{(n)}$ $(n = 1, \ldots, \mathcal{N})$. Snellův zákon vyžaduje, aby složky vektoru šíření rovnoběžné s rozhraními byly ve všech vrstvách a na všech rozhraních stejné.

Hledáme řešení vlnové rovnice ve tvaru monochromatických rovinných vln s definovanou polarizací nejprve v nekonečně rozlehlých prostorech charakterizovaných těmito tenzory permitivity. Pro každou vrstvu uvažovanou jako nekonečné prostředí je to problém na vlastní hodnoty. Jeho řešením jsou normálové (vůči zvoleným rovinám rozhraní) složky čtyř vlastních vektorů šíření. Podélné složky vektorů šíření, jak bylo uvedeno výše, jsou určeny pomocí Snellova zákona. Čtyřem vlastním vektorům šíření odpovídají čtyři vektory vlastních polarizací (vlastních polarizačních módů, nebo jen stručně vlastních polarizací).

Předpokládáme, že elektromagnetická vlnová pole v dané vrstvě, která může mít libovolnou tloušťku,[1] lze vyjádřit jako lineární superpozici čtyř monochromatických rovinných vln charakterizovaných těmito vlastními vektory šíření a jim odpovídajícími vlastními polarizačními módy. Naše omezení na rovinné vlny v ohraničených oblastech (tj. ve vrstvách) odpovídá Fraunhoferově aproximaci.

[1]Předpokládáme tedy, že nejsou kladena žádná omezení na poměr vlnové délky ideálně koherentního záření ve vrstvě k tloušťce vrstvy.

Čtyři vztahy mezi amplitudami vlastních polarizačních módů na obou stranách každého rozhraní plynou z okrajových podmínek pro tečné složky polí. Ty vyžadují spojitost složek celkových elektrických a magnetických polí vln rovnoběžných s rovinami rozhraní při průchodu každým z $\mathcal{N}+1$ rozhraní. Okrajové podmínky lze vyjádřit pomoci matice 4×4 zahrnujících vztahy mezi kvartetem amplitud polí v jedné vrstvě a kvartetem amplitud polí ve vrstvě sousední. Tato matice se označuje jako matice přenosová neboli matice transferu. Představuje součin tří matic: matice inverzní k dynamické matici ve vrstvě $(n-1)$, dynamické matice ve vrstvě n a diagonální matice šíření neboli matice propagační ve vrstvě n.

Z hlediska odezvy je multivrstevnatá struktura reprezentována součinem $\mathcal{N}+1$ matic transferu. Tento součin váže sloupcové vektory 4×1 amplitud elektrických polí v poloprostorech obklopujících multivrstvu. Vektory 4×1 amplitud elektrických polí v obou izotropních poloprostorech jsou tvořeny komplexními amplitudami dvojice vln s odlišnými, nejlépe ortogonálními, polarizacemi postupujícími k multivrstevnaté struktuře a komplexními amplitudami odpovídající dvojice vln postupujících od této mutlivrstevnaté struktury.

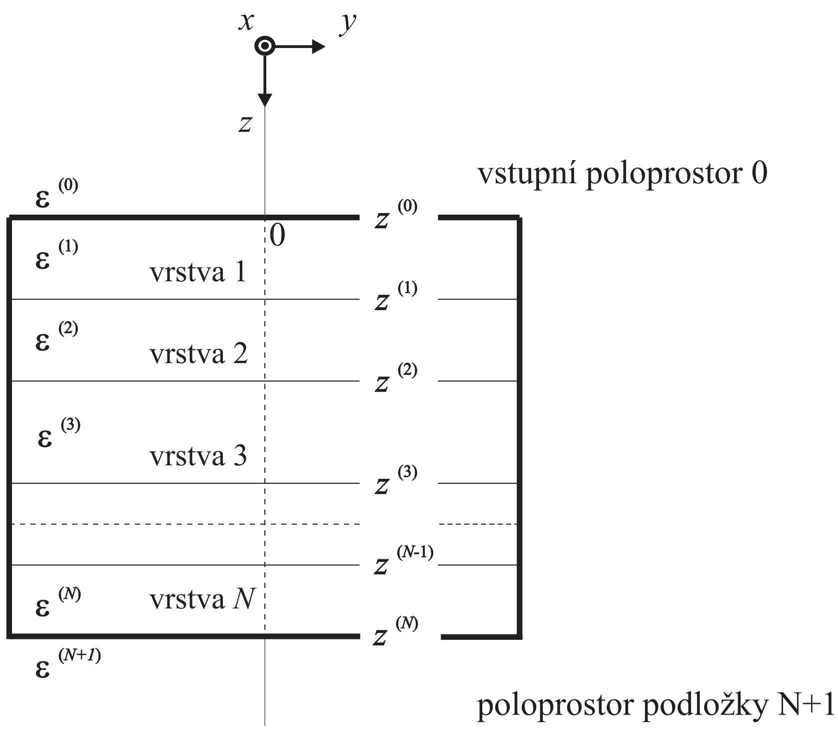
Obvykle volíme amplitudy přicházejících vln v jednom poloprostoru nulové. Takový poloprostor pak označujeme jako výstupní. To nám zjednodušuje definici globálních transmisních a reflexních koeficientů multivrstvy. S tímto omezením lze mimochodem formalizmus matic 4×4 redukovat na formalizmus matic (2×2) [5]. Globální transmisní a reflexní koeficienty představují informaci hledanou k úplné charakteristice optické odezvy multivrstvy. Konvenčně se tyto koeficienty zapisují ve tvaru Jonesových reflexních a transmisních matic dané multivrstevnaté struktury.

4.2 Vlastní módy

Uvažujeme strukturu znázorněnou na obrázku 4.1 tvořenou $\mathcal{N}$ homogenními vrstvami navzájem oddělenými rovinami rozhraní $z=z^{(n)}$ $(n=0,\ldots,\mathcal{N})$ v kartézské souřadnicové soustavě zvolené tak, že $z^{(n-1)}<z^{(n)}$. Struktura je obklopena homogenním poloprostorem (0) specifikovaném $z<z^{(0)}$ a homogenním poloprostorem $(\mathcal{N}+1)$ specifikovaném $z>z^{(\mathcal{N})}$. Pro jednoduchost si můžeme oba poloprostory představit jako nemagnetické, neabsorbující a izotropní. Homogenní vrstva n vymezená rovinami rozhraní $z=z^{(n-1)}$ a $z=z^{(n)}$ je charakterizována tenzorem komplexní relativní permitivity

$$\varepsilon^{(n)}=\begin{pmatrix}\varepsilon_{xx}^{(n)} & \varepsilon_{xy}^{(n)} & \varepsilon_{xz}^{(n)}\\ \varepsilon_{yx}^{(n)} & \varepsilon_{yy}^{(n)} & \varepsilon_{yz}^{(n)}\\ \varepsilon_{zx}^{(n)} & \varepsilon_{zy}^{(n)} & \varepsilon_{zz}^{(n)}\end{pmatrix} \tag{4.2.1}$$

který může uvážit současné působení libovolné krystalové anizotropie a anizotropií indukovaných vnějším mechanickým pnutím, elektrickým polem, magnetickým polem, případně anizotropií indukovaných při vytváření vrstvy jinými mechanizmy (například preferenčními směry v orientaci atomů). V anizotropních absorbujících prostředích jsou prvky tenzoru permitivity $\varepsilon_{ij}^{(n)}$ obecně komplexní. Jsou-li navíc tato



Obr. 4.1: Multivrstevnatá struktura tvořená $\mathcal{N}$ homogenními anizotropními vrstvami charakterizovanými obecnými tenzory permitivity $\boldsymbol{\varepsilon}^{(n)}$, kde $n = 1, \dots, \mathcal{N}$. Roviny rozhraní jsou kolmé na společnou osu rovnoběžnou s osou z kartézské souřadnicové soustavy.

prostředí i magneticky uspořádaná, přestává být tenzor permitivity symetrický $tj.$, $\varepsilon_{ij}^{(n)} \neq \varepsilon_{ji}^{(n)}$. V optické oblasti spektra magnetickou permeabilitu vrstvy pokládáme za skalární a frekvenčně nezávislou (nedisperzní). To odpovídá elektrické dipolové aproximaci, která je na optických frekvencích oprávněná. Nezpůsobíme dokonce žádnou význačnou odchylku od reality, když položíme magnetickou permeabilitu ve všech vrstvách rovnou její hodnotě ve vakuu μ_{vac}.

Pro řešení vlnové rovnice ve tvaru monochromatické rovinné vlny v (nekonečném) prostředí n-té vrstvy s vektorem šíření $\gamma^{(n)}$ a s úhlovou frekvencí ω lze vektor elektrického pole vyjádřit takto[2]

$$\boldsymbol{E}^{(n)} = \boldsymbol{E}_0^{(n)} \exp\left[\mathrm{j}\left(\omega t - \gamma^{(n)} \cdot \boldsymbol{r}\right)\right] . \tag{4.2.2}$$

vlnová rovnice pak dostává tvar

$$\gamma^{(n)2} \boldsymbol{E}_0^{(n)} - \gamma^{(n)} \left(\gamma^{(n)} \cdot \boldsymbol{E}_0^{(n)}\right) = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon^{(n)} \boldsymbol{E}_0^{(n)}, \tag{4.2.3}$$

kde $\boldsymbol{E}_0^{(n)}$ je komplexní vektor amplitudy elektrického pole vlny, který charakterizuje její obecně eliptickou polarizaci. Vektorová rovnice (4.2.3) představuje soustavu ska-

[2]Konvence $\exp(\mathrm{j}\omega t)$

lárních rovnic, které v maticovém zápisu lze vyjádřit jako

$$\begin{pmatrix} \gamma_y^{(n)2}+\gamma_z^{(n)2}-\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{xx}^{(n)} & -\gamma_x^{(n)}\gamma_y^{(n)}-\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{xy}^{(n)} & -\gamma_x^{(n)}\gamma_z^{(n)}-\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{xz}^{(n)} \\ -\gamma_y^{(n)}\gamma_x^{(n)}-\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{yx}^{(n)} & \gamma_z^{(n)2}+\gamma_x^{(n)2}-\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{yy}^{(n)} & -\gamma_y^{(n)}\gamma_z^{(n)}-\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{yz}^{(n)} \\ -\gamma_z^{(n)}\gamma_x^{(n)}-\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{zx}^{(n)} & -\gamma_z^{(n)}\gamma_y^{(n)}-\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{zy}^{(n)} & \gamma_x^{(n)2}+\gamma_y^{(n)2}-\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{zz}^{(n)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{0x}^{(n)} \\ E_{0y}^{(n)} \\ E_{0z}^{(n)} \end{pmatrix} = 0\,. \tag{4.2.4}$$

Vektor šíření v prostředí n-té vrstvy zapíšeme v kartézských souřadnicích jako

$$\gamma^{(n)} = \frac{\omega}{c}\left(N_x^{(n)}\hat{\boldsymbol{x}} + N_y^{(n)}\hat{\boldsymbol{y}} + N_z^{(n)}\hat{\boldsymbol{z}}\right)\,. \tag{4.2.5}$$

Snellův zákon požadující, aby rovinné vlny postupovaly strukturou tak, že složky jejich vektorů šíření ležící v planparalelních rovinách rozhraní vrstev zůstávají invariantní, lze vyjádřit rovnicemi

$$\gamma^{(n)}\cdot\hat{\boldsymbol{x}} = \frac{\omega}{c}N_x^{(0)}\,, \tag{4.2.6a}$$

$$\gamma^{(n)}\cdot\hat{\boldsymbol{y}} = \frac{\omega}{c}N_y^{(0)}\,, \tag{4.2.6b}$$

pro $n = 1$ až $\mathcal{N}+1$.

Pro danou volbu hodnot N_x a N_y, soustava rovnic (4.2.4) dává vlastní hodnoty $N_{zj}^{(n)}$, $j = 1,...,4,$. Ty jsou řešením rovnice na vlastní hodnoty. Tuto rovnici můžeme zapsat jako požadavek, aby determinant rovnice (4.2.4) byl roven nule

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_{xx}^{(n)}-N_y^2-N_z^{(n)2} & \varepsilon_{xy}^{(n)}+N_xN_y & \varepsilon_{xz}^{(n)}+N_xN_z^{(n)} \\ \varepsilon_{yx}^{(n)}+N_xN_y & \varepsilon_{yy}^{(n)}-N_x^2-N_z^{(n)2} & \varepsilon_{yz}^{(n)}+N_yN_z^{(n)} \\ \varepsilon_{zx}^{(n)}+N_xN_z^{(n)} & \varepsilon_{zy}^{(n)}+N_yN_z^{(n)} & \varepsilon_{zz}^{(n)}-N_x^2-N_y^2 \end{vmatrix} = 0\,. \tag{4.2.7}$$

Dostáváme algebraickou rovnici čtvrtého stupně

$$\begin{aligned} &\varepsilon_{zz}^{(n)}N_z^{(n)4} + \left[N_x\left(\varepsilon_{zx}^{(n)}+\varepsilon_{xz}^{(n)}\right) + N_y\left(\varepsilon_{yz}^{(n)}+\varepsilon_{zy}^{(n)}\right)\right]N_z^{(n)3} \\ &- \left[\varepsilon_{zz}^{(n)}\left(\varepsilon_{xx}^{(n)}-N_x^2\right) + \varepsilon_{zz}^{(n)}\left(\varepsilon_{yy}^{(n)}-N_y^2\right) - \varepsilon_{xx}^{(n)}N_x^2 - \varepsilon_{yy}^{(n)}N_y^2\right. \\ &- \left. N_xN_y\left(\varepsilon_{xy}^{(n)}+\varepsilon_{yx}^{(n)}\right) - \varepsilon_{zx}^{(n)}\varepsilon_{xz}^{(n)} - \varepsilon_{yz}^{(n)}\varepsilon_{zy}^{(n)}\right]N_z^{(n)2} \\ &- \left[\left(\varepsilon_{xx}^{(n)}-N_y^2\right)N_y\left(\varepsilon_{yz}^{(n)}+\varepsilon_{zy}^{(n)}\right) + \left(\varepsilon_{yy}^{(n)}-N_x^2\right)N_x\left(\varepsilon_{zx}^{(n)}+\varepsilon_{xz}^{(n)}\right)\right. \\ &- \left.\left(\varepsilon_{xy}^{(n)}+N_xN_y\right)\left(N_x\varepsilon_{yz}^{(n)}+N_y\varepsilon_{zx}^{(n)}\right) - \left(\varepsilon_{yx}^{(n)}+N_xN_y\right)\left(N_x\varepsilon_{zy}^{(n)}+N_y\varepsilon_{xz}^{(n)}\right)\right]N_z^{(n)} \\ &+ \left(\varepsilon_{zz}^{(n)}-N_x^2-N_y^2\right)\left[\left(\varepsilon_{xx}^{(n)}-N_y^2\right)\left(\varepsilon_{yy}^{(n)}-N_x^2\right) - \left(\varepsilon_{xy}^{(n)}+N_xN_y\right)\left(\varepsilon_{yx}^{(n)}+N_xN_y\right)\right] \\ &- \left(\varepsilon_{xx}^{(n)}-N_y^2\right)\varepsilon_{yz}^{(n)}\varepsilon_{zy}^{(n)} - \left(\varepsilon_{yy}^{(n)}-N_x^2\right)\varepsilon_{zx}^{(n)}\varepsilon_{xz}^{(n)} \\ &+ N_xN_y\left(\varepsilon_{yz}^{(n)}\varepsilon_{zx}^{(n)}+\varepsilon_{zy}^{(n)}\varepsilon_{xz}^{(n)}\right) + \varepsilon_{xy}^{(n)}\varepsilon_{zx}^{(n)}\varepsilon_{yz}^{(n)} + \varepsilon_{yx}^{(n)}\varepsilon_{xz}^{(n)}\varepsilon_{zy}^{(n)} = 0\,. \end{aligned} \tag{4.2.8}$$

Ve zvláštních případech se tato rovnice redukuje na bikvadratickou. Jedním takovým zvláštním případem je původně izotropní prostředí, v němž je vytvořena homogenní magnetizace ve směru zvolené osy. Tehdy $\varepsilon_{ij} = -\varepsilon_{ji}$, $i,j = x,y$ and z. V magnetických i nemagnetických krystalech nebo v krystalických či amorfních prostředích s indukovanými anizotropiemi může být tenzor permitivity zcela obecný vyžadující specifikaci deviti komplexních složek. V dalším proto budeme předpokládat tenzor permitivity v nejobecnějším tvaru. Vlastní polarizace elektrického pole (nebo také vlastní polarizační módy) můžeme vypočítat například z první a třetí rovnice soustavy (4.2.4). Vyjádříme je jako kartézské vektory

$$\boldsymbol{e}_j^{(n)} = \begin{pmatrix} \left(\varepsilon_{zz}^{(n)} - N_x^2 - N_y^2\right)\left(N_x N_y + \varepsilon_{xy}^{(n)}\right) - \left(N_x N_{zj}^{(n)} + \varepsilon_{xz}^{(n)}\right)\left(N_y N_{zj}^{(n)} + \varepsilon_{zy}^{(n)}\right) \\ -\left(\varepsilon_{zz}^{(n)} - N_x^2 - N_y^2\right)\left(\varepsilon_{xx}^{(n)} - N_y^2 - N_{zj}^{(n)2}\right) + \left(N_x N_{zj}^{(n)} + \varepsilon_{zx}^{(n)}\right)\left(N_x N_{zj}^{(n)} + \varepsilon_{xz}^{(n)}\right) \\ \left(\varepsilon_{xx}^{(n)} - N_y^2 - N_{zj}^{(n)2}\right)\left(N_y N_{zj}^{(n)} + \varepsilon_{zy}^{(n)}\right) - \left(N_x N_{zj}^{(n)} + \varepsilon_{zx}^{(n)}\right)\left(N_x N_y + \varepsilon_{xy}^{(n)}\right) \end{pmatrix} \tag{4.2.9}$$

kde $j = 1,\ldots,4$, rozlišuje vlastní hodnoty $N_{zj}^{(n)}$, tj. z-složky vektoru šíření redukovaného (děleného) koeficientem ω/c, a jim odpovídající vlastní polarizace $\boldsymbol{e}_j^{(n)}$. Způsob, jakým číslujeme vlastní hodnoty $N_{zj}^{(n)}$, a jim odpovídající vlastní polarizace ve vrstvách a v okolních poloprostorech je věcí konvence.[3]

Abychom si naši situaci poněkud zjednodušili, předpokládejme, že komplexní vektory šíření v jednom z izotropních poloprostorů obklopujících strukturu jsou omezeny na rovinu kolmou ke všem rozhraním. Tato rovina pak definuje rovinu dopadu. Rovinu dopadu můžeme zvolit tak, aby jedna ze dvou složek vektorů šíření ležících v rovinách rozhraní byla nulová. To se dosáhne bez újmy na obecnosti vhodnou rotací souřadnicové soustavy. Libovolná rotace transformuje totiž původní tenzor permitivity, o němž zde předpokládáme, že je zcela obecný, na jiný obecný tenzor permitivity opět s plným počtem nezávislých složek. Zvolíme tedy rovinu dopadu v rovině yz, tj. kolmou na osu x. Potom $N_x = 0$ a vektor šíření se redukuje na tvar

$$\gamma^{(n)} = \frac{\omega}{c}\left(N_y^{(n)}\hat{\boldsymbol{y}} + N_z^{(n)}\hat{\boldsymbol{z}}\right) . \tag{4.2.10}$$

Snellův zákon (4.2.6) se odpovídajícím způsobem zjednoduší na

$$\gamma^{(n)}\cdot\hat{\boldsymbol{y}} = \frac{\omega}{c} N_y . \tag{4.2.11}$$

V případě, že vstupním poloprostorem je vakuum, N_y je jednoduše rovno sinu úhlu dopadu.

[3] V prostředích s vyšší symetrií může dojit k degeneraci vlastních polarizací, což vede k neurčitým výrazům pro vektory vlastních polarizací. Neurčitosti lze většinou odstranit vhodným výběrem rovnic (4.2.4). V prostředích s vyšší symetrií lze však vždy nalézt vlastní polarizace přímo z vlnové rovnice pro daný, tedy méně obecný, tvar tenzoru permitivity.

Vlnová rovnice (4.2.4) se volbou $N_x = 0$ výrazně zjednoduší

$$\begin{pmatrix} \left(N_y^2 + N_z^{(n)2} - \varepsilon_{xx}^{(n)}\right) & -\varepsilon_{xy}^{(n)} & -\varepsilon_{xz}^{(n)} \\ -\varepsilon_{yx}^{(n)} & \left(N_z^{(n)2} - \varepsilon_{yy}^{(n)}\right) & -\left(N_y N_z^{(n)} + \varepsilon_{yz}^{(n)}\right) \\ -\varepsilon_{zx}^{(n)} & -\left(N_y N_z^{(n)} + \varepsilon_{zy}^{(n)}\right) & \left(N_y^2 - \varepsilon_{zz}^{(n)}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{0x}^{(n)} \\ E_{0y}^{(n)} \\ E_{0z}^{(n)} \end{pmatrix} = 0\,. \tag{4.2.12}$$

Rovnici na vlastní hodnoty plynoucí z vektorové vlnové rovnice (4.2.12) získáme podobně, když také v rovnici (4.2.8) položíme $N_x = 0$

$$\begin{aligned} & \varepsilon_{zz}^{(n)} N_z^{(n)4} + \left(\varepsilon_{yz}^{(n)} + \varepsilon_{zy}^{(n)}\right) N_y N_z^{(n)3} \\ - & \left[\varepsilon_{yy}^{(n)}\left(\varepsilon_{zz}^{(n)} - N_y^2\right) + \varepsilon_{zz}^{(n)}\left(\varepsilon_{xx}^{(n)} - N_y^2\right) - \varepsilon_{xz}^{(n)}\varepsilon_{zx}^{(n)} - \varepsilon_{yz}^{(n)}\varepsilon_{zy}^{(n)}\right] N_z^{(n)2} \\ - & \left[\left(\varepsilon_{xx}^{(n)} - N_y^2\right)\left(\varepsilon_{yz}^{(n)} + \varepsilon_{zy}^{(n)}\right) - \varepsilon_{xy}^{(n)}\varepsilon_{zx}^{(n)} - \varepsilon_{yx}^{(n)}\varepsilon_{xz}^{(n)}\right] N_y N_z^{(n)} \\ + & \varepsilon_{yy}^{(n)}\left[\left(\varepsilon_{xx}^{(n)} - N_y^2\right)\left(\varepsilon_{zz}^{(n)} - N_y^2\right) - \varepsilon_{xz}^{(n)}\varepsilon_{zx}^{(n)}\right] - \varepsilon_{xy}^{(n)}\varepsilon_{yx}^{(n)}\left(\varepsilon_{zz}^{(n)} - N_y^2\right) \\ - & \varepsilon_{yz}^{(n)}\varepsilon_{zy}^{(n)}\left(\varepsilon_{xx}^{(n)} - N_y^2\right) + \varepsilon_{xy}^{(n)}\varepsilon_{zx}^{(n)}\varepsilon_{yz}^{(n)} + \varepsilon_{yx}^{(n)}\varepsilon_{xz}^{(n)}\varepsilon_{zy}^{(n)} = 0\,. \end{aligned} \tag{4.2.13}$$

Elektrické pole rovinné vlny v n-té vrstvě můžeme psát

$$\boldsymbol{E}^{(n)} = \sum_{j=1}^{4} \mathrm{E}_{0j}^{(n)} \boldsymbol{e}_j^{(n)} \exp\left\{\mathrm{j}\omega t - \mathrm{j}\frac{\omega}{c}\left[N_y y + N_{zj}^{(n)}(z - z^{(n)})\right]\right\}, \tag{4.2.14}$$

kde $\mathrm{E}_{0j}^{(n)}$ je komplexní skalární amplituda j-té vlastní polarizace a $\boldsymbol{e}_j^{(n)}$ je komplexní vektor specifikující vlastní polarizaci. Symbol $\mathrm{E}_{0j}^{(n)}$ označuje amplitudu pole módu v rovině $z = z^{(n)}$ uvnitř n-té vrstvy při rozhraní sdíleném s $(n{+}1)$-tou vrstvou. Bývá výhodné používat normované vlastní polarizace a v souvislosti s tím požadovat, aby

$$\left[\boldsymbol{e}_j^{(n)}\right]^{\dagger} \boldsymbol{e}_j^{(n)} = 1\,, \tag{4.2.15}$$

kde $\dagger$ označuje hermitovské sdružení. Celková fáze součinu $\mathrm{E}_{0j}^{(n)} \boldsymbol{e}_j^{(n)}$ může být libovolně rozdělena mezi $\mathrm{E}_{0j}^{(n)}$ a $\boldsymbol{e}_j^{(n)}$. V klasické elipsometrii izotropních povrchů, je pro toto rozdělení stanovena konvence [6]. Pro polarizaci elektrických (magnetických) polí dopadající, odražené a procházející vlny kolmo k rovině dopadu se jednotkové vektory elektrických (magnetických) polí volí souhlasně rovnoběžné. Kladný smysl vektorů magnetických (elektrických) polí potom plyne z Maxwellových rovnic. Při této volbě[4] jsou v limitě kolmého dopadu vektory elektrických polí dopadající a odražené vlny polarizované kolmo k rovině dopadu *souhlasně* rovnoběžné a vektory elektrických polí dopadající a odražené vlny polarizované rovnoběžně s rovinou dopadu *nesouhlasně* rovnoběžné. Orientace roviny dopadu přestává být při kolmém dopadu definovaná, takže vlny s lineární polarizací kolmou a rovnoběžnou vůči rovině dopadu nemůžeme rozlišit.

Volíme proto kladnou orientaci vektorů elektrického pole vln lineárně polarizovaných v rovině dopadu tak, aby byly stejné pro dopadající i odraženou vlnu. Vektor

[4] Volba plyne ze symetrie Maxwellových rovnic pro lineární izotropní nevodivá prostředí vůči záměnám $\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{H} \to -\boldsymbol{E}$ a $\varepsilon \leftrightarrow \mu$ vyjadřující relace duality.

vlastní polarizace $e_j^{(n)}$ určujeme tedy v souřadnicové soustavě vázané na multivrstvu. Z prvního a třetího řádku maticově vyjádřené vlnové rovnice (4.2.12) máme

$$\boldsymbol{e}_j^{(n)} = C_j^{(n)} \begin{pmatrix} -\varepsilon_{xy}^{(n)}\left(\varepsilon_{zz}^{(n)} - N_y^2\right) + \varepsilon_{xz}^{(n)}\left(\varepsilon_{zy}^{(n)} + N_y N_{zj}^{(n)}\right) \\ \left(\varepsilon_{zz}^{(n)} - N_y^2\right)\left(\varepsilon_{xx}^{(n)} - N_y^2 - N_{zj}^{(n)2}\right) - \varepsilon_{xz}^{(n)}\varepsilon_{zx}^{(n)} \\ -\left(\varepsilon_{xx}^{(n)} - N_y^2 - N_{zj}^{(n)2}\right)\left(\varepsilon_{zy}^{(n)} + N_y N_{zj}^{(n)}\right) + \varepsilon_{zx}^{(n)}\varepsilon_{xy}^{(n)} \end{pmatrix} \tag{4.2.16}$$

neboli

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_j^{(n)} &= C_j^{(n)} \Big\{ \hat{\boldsymbol{x}} \left[-\varepsilon_{xy}^{(n)}\left(\varepsilon_{zz}^{(n)} - N_y^2\right) + \varepsilon_{xz}^{(n)}\left(\varepsilon_{zy}^{(n)} + N_y N_{zj}^{(n)}\right)\right] \\ &+ \hat{\boldsymbol{y}} \left[\left(\varepsilon_{zz}^{(n)} - N_y^2\right)\left(\varepsilon_{xx}^{(n)} - N_y^2 - N_{zj}^{(n)2}\right) - \varepsilon_{xz}^{(n)}\varepsilon_{zx}^{(n)} \right] \\ &+ \hat{\boldsymbol{z}} \left[-\left(\varepsilon_{xx}^{(n)} - N_y^2 - N_{zj}^{(n)2}\right)\left(\varepsilon_{zy}^{(n)} + N_y N_{zj}^{(n)}\right) + \varepsilon_{zx}^{(n)}\varepsilon_{xy}^{(n)} \right] \Big\} \,, \end{aligned} \tag{4.2.17}$$

kde $C_j^{(n)}$ jsou odpovídající normalizační faktory. Podobně jako v případě rovnice (4.2.9), může hledání vlastních polarizací z rovnice (4.2.16) nebo (4.2.17) vést k singularitám, když se obecný tenzor permitivity zredukuje na nějaký speciální tvar odpovídající prostředím s vyšší symetrií. Singularity lze vyloučit buď analyticky nebo vhodnými numerickými procedurami.

Magnetická pole vlastních polarizačních módů plynou např. z Maxwellovy rovnice vyjadřující Faradayův zákon, $\nabla \times \boldsymbol{E} = -\partial \boldsymbol{B}/\partial t$, tj.

$$c\boldsymbol{B}^{(n)} = \sum_{j=1}^{4} \mathrm{E}_{0j}^{(n)} \boldsymbol{b}_j^{(n)} \exp\left\{ \mathrm{j}\omega t - \mathrm{j}\frac{\omega}{c}\left[N_y y + N_{zj}^{(n)}(z - z^{(n)})\right]\right\},. \tag{4.2.18}$$

Zde

$$\boldsymbol{b}_j^{(n)} = C_j^{(n)} \begin{pmatrix} -\left(\varepsilon_{xx}^{(n)} - N_y^2 - N_{zj}^{(n)2}\right)\left(N_{zj}^{(n)}\varepsilon_{zz}^{(n)} + N_y\varepsilon_{zy}^{(n)}\right) + \varepsilon_{zx}^{(n)}\left(N_y\varepsilon_{xy}^{(n)} + N_{zj}^{(n)}\varepsilon_{xz}^{(n)}\right) \\ N_{zj}^{(n)}\left[-\varepsilon_{xy}^{(n)}\left(\varepsilon_{zz}^{(n)} - N_y^2\right) + \varepsilon_{xz}^{(n)}\left(\varepsilon_{zy}^{(n)} + N_y N_{zj}^{(n)}\right)\right] \\ -N_y\left[-\varepsilon_{xy}^{(n)}\left(\varepsilon_{zz}^{(n)} - N_y^2\right) + \varepsilon_{xz}^{(n)}\left(\varepsilon_{zy}^{(n)} + N_y N_{zj}^{(n)}\right)\right] \end{pmatrix}, \tag{4.2.19}$$

což plyne užitím

$$\begin{aligned} \boldsymbol{b}_j^{(n)} &= \left(N_y\hat{\boldsymbol{y}} + N_{zj}^{(n)}\hat{\boldsymbol{z}}\right) \times \boldsymbol{e}_j^{(n)} \\ &= C_j^{(n)} \Big\{ \hat{\boldsymbol{x}} \Big[-\left(\varepsilon_{xx}^{(n)} - N_y^2 - N_{zj}^{(n)2}\right)\left(N_{zj}^{(n)}\varepsilon_{zz}^{(n)} + N_y\varepsilon_{zy}^{(n)}\right) \\ &\qquad + \varepsilon_{zx}^{(n)}\left(N_y\varepsilon_{xy}^{(n)} + N_{zj}^{(n)}\varepsilon_{xz}^{(n)}\right)\Big] \\ &\qquad + \hat{\boldsymbol{y}} N_{zj}^{(n)}\left[-\varepsilon_{xy}^{(n)}\left(\varepsilon_{zz}^{(n)} - N_y^2\right) + \varepsilon_{xz}^{(n)}\left(\varepsilon_{zy}^{(n)} + N_y N_{zj}^{(n)}\right)\right] \\ &\qquad - \hat{\boldsymbol{z}} N_y\left[-\varepsilon_{xy}^{(n)}\left(\varepsilon_{zz}^{(n)} - N_y^2\right) + \varepsilon_{xz}^{(n)}\left(\varepsilon_{zy}^{(n)} + N_y N_{zj}^{(n)}\right)\right]\Big\} \end{aligned} \tag{4.2.20}$$

Střední hodnota Poyntingova vektoru j-tého vlastního polarizačního módu je dána reálnou částí (označenou jako $\Re$) vektorového součinu

$$\boldsymbol{S}_j^{(n)} = \frac{1}{2\mu_{\mathrm{vac}}} \Re \left[\boldsymbol{E}_j^{(n)*} \times \boldsymbol{B}_j^{(n)} \right] , \tag{4.2.21}$$

v jednotkách Watt/m^2 . Hvězdička * označuje komplexně sdruženou veličinu a $\mu_{\mathrm{vac}} = 4\pi \times 10^{-7}$mkgs^{-2}A^{-2} je magnetická permeabilita vakua. Užitím rovnice (4.2.14) a rovnic (4.2.16)–(4.2.19) dostaneme

$$\boldsymbol{S}_j^{(n)}(z) = \frac{|\mathrm{E}_{0j}^{(n)}|^2}{2Z_{\mathrm{vac}}} \mathrm{Re} \left\{ \left(\boldsymbol{e}_j^{(n)} \right)^* \times \left[\left(N_y \hat{\boldsymbol{y}} + N_{zj}^{(n)} \hat{\boldsymbol{z}} \right) \times \boldsymbol{e}_j^{(n)} \right] \right\} \exp \left[-\frac{2\omega}{c} k_{zj}^{(n)} (z - z^{(n)}) \right] \tag{4.2.22}$$

kde $Z_{\mathrm{vac}} = 376.63\,\Omega$ je vlnová impedance vakua. Klademe $N_{zj}^{(n)} = n_{zj}^{(n)} - \mathrm{j}k_{zj}^{(n)}$ vzhledem k naší volbě znaménka v komplexní exponenciální funkci z rovnice (4.2.2). Potom $(2\omega/c)|k_{zj}^{(n)}|$ můžeme chápat jako absorpční koeficient j-tého vlastního polarizačního módu v n-té vrstvě.

4.3 Maticová reprezentace planárních struktur

Požadavek spojitosti složek elektrických a magnetických polí vln tečných vůči rozhraní $z = z^{(n-1)}$ oddělujícím $(n-1)$-tou a n-tou vrstvu poskytuje vztahy mezi amplitudami vlastních polarizačních módů v sousedících vrstvách (případně mezi amplitudami v první nebo poslední vrstvě a amplitudami v obklopujících poloprostorech v rovinách $z = z^{(0)}$ a $z = z^{(\mathcal{N})}$)

$$\sum_{j=1}^{4} \mathrm{E}_{0j}^{(n-1)} \boldsymbol{e}_j^{(n-1)} \cdot \hat{\boldsymbol{x}} = \sum_{j=1}^{4} \mathrm{E}_{0j}^{(n)} \boldsymbol{e}_j^{(n)} \cdot \hat{\boldsymbol{x}} \exp \left(\mathrm{j} \frac{\omega}{c} N_{zj}^{(n)} d^{\,(n)} \right) , \tag{4.3.1a}$$

$$\sum_{j=1}^{4} \mathrm{E}_{0j}^{(n-1)} \boldsymbol{e}_j^{(n-1)} \cdot \hat{\boldsymbol{y}} = \sum_{j=1}^{4} \mathrm{E}_{0j}^{(n)} \boldsymbol{e}_j^{(n)} \cdot \hat{\boldsymbol{y}} \exp \left(\mathrm{j} \frac{\omega}{c} N_{zj}^{(n)} d^{\,(n)} \right) , \tag{4.3.1b}$$

$$\sum_{j=1}^{4} \mathrm{E}_{0j}^{(n-1)} \boldsymbol{b}_j^{(n-1)} \cdot \hat{\boldsymbol{x}} = \sum_{j=1}^{4} \mathrm{E}_{0j}^{(n)} \boldsymbol{b}_j^{(n)} \cdot \hat{\boldsymbol{x}} \exp \left(\mathrm{j} \frac{\omega}{c} N_{zj}^{(n)} d^{\,(n)} \right) , \tag{4.3.1c}$$

$$\sum_{j=1}^{4} \mathrm{E}_{0j}^{(n-1)} \boldsymbol{b}_j^{(n-1)} \cdot \hat{\boldsymbol{y}} = \sum_{j=1}^{4} \mathrm{E}_{0j}^{(n)} \boldsymbol{b}_j^{(n)} \cdot \hat{\boldsymbol{y}} \exp \left(\mathrm{j} \frac{\omega}{c} N_{zj}^{(n)} d^{\,(n)} \right) . \tag{4.3.1d}$$

Zde $d^{\,(n)} = z^{\,(n)} - z^{\,(n-1)}$ je it tloušťka n-té vrstvy. Uvedení tloušťky vrstvy odstraňuje závislost rovnic na poloze rozhraní na ose z . Tento krok je proto významný pro konstrukci maticového formalizmu, který bude vysvětlen níže. Amplitudy vlastních módů v n-té vrstvě u rozhraní $z = z^{(n-1)}$ jsou dány amplitudami vlastních módů $\mathrm{E}_{0j}^{(n)}$ v téže vrstvě u opačného rozhraní $z = z^{(n)}$ násobenými faktorem $\exp \left(\mathrm{j} \frac{\omega}{c} N_{zj}^{(n)} d^{\,(n)} \right)$.

Všimněme si, že úbytek hustoty toku energie způsobený ztrátami v n-té vrstvě je dán sčítáním přes všechny vlastní polarizační módy

$$W_{\text{dis}}^{(n)} = \sum_{j=1}^{4} \left| \boldsymbol{S}_j^{(n)}(0) - \boldsymbol{S}_j^{(n)}(d^{\,(n)}) \right| . \tag{4.3.2}$$

Rovnice (4.3.1) můžeme vyjádřit v maticovém tvaru ve změněném pořadí řádků jako

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1^{(n-1)}\cdot\hat{\boldsymbol{x}} & \boldsymbol{e}_2^{(n-1)}\cdot\hat{\boldsymbol{x}} & \boldsymbol{e}_3^{(n-1)}\cdot\hat{\boldsymbol{x}} & \boldsymbol{e}_4^{(n-1)}\cdot\hat{\boldsymbol{x}} \\ \boldsymbol{b}_1^{(n-1)}\cdot\hat{\boldsymbol{y}} & \boldsymbol{b}_2^{(n-1)}\cdot\hat{\boldsymbol{y}} & \boldsymbol{b}_3^{(n-1)}\cdot\hat{\boldsymbol{y}} & \boldsymbol{b}_4^{(n-1)}\cdot\hat{\boldsymbol{y}} \\ \boldsymbol{e}_1^{(n-1)}\cdot\hat{\boldsymbol{y}} & \boldsymbol{e}_2^{(n-1)}\cdot\hat{\boldsymbol{y}} & \boldsymbol{e}_3^{(n-1)}\cdot\hat{\boldsymbol{y}} & \boldsymbol{e}_4^{(n-1)}\cdot\hat{\boldsymbol{y}} \\ \boldsymbol{b}_1^{(n-1)}\cdot\hat{\boldsymbol{x}} & \boldsymbol{b}_2^{(n-1)}\cdot\hat{\boldsymbol{x}} & \boldsymbol{b}_3^{(n-1)}\cdot\hat{\boldsymbol{x}} & \boldsymbol{b}_4^{(n-1)}\cdot\hat{\boldsymbol{x}} \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} \mathrm{E}_{01}^{(n-1)} \\ \mathrm{E}_{02}^{(n-1)} \\ \mathrm{E}_{03}^{(n-1)} \\ \mathrm{E}_{04}^{(n-1)} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1^{(n)}\cdot x & \boldsymbol{e}_2^{(n)}\cdot\hat{\boldsymbol{x}} & \boldsymbol{e}_3^{(n)}\cdot\hat{\boldsymbol{x}} & \boldsymbol{e}_4^{(n)}\cdot\hat{\boldsymbol{x}} \\ \boldsymbol{b}_1^{(n)}\cdot\hat{\boldsymbol{y}} & \boldsymbol{b}_2^{(n)}\cdot\hat{\boldsymbol{y}} & \boldsymbol{b}_3^{(n)}\cdot\hat{\boldsymbol{y}} & \boldsymbol{b}_4^{(n)}\cdot\hat{\boldsymbol{y}} \\ \boldsymbol{e}_1^{(n)}\cdot\hat{\boldsymbol{y}} & \boldsymbol{e}_2^{(n)}\cdot\hat{\boldsymbol{y}} & \boldsymbol{e}_3^{(n)}\cdot\hat{\boldsymbol{y}} & \boldsymbol{e}_4^{(n)}\cdot\hat{\boldsymbol{y}} \\ b_1^{(n)}\cdot\hat{\boldsymbol{x}} & \boldsymbol{b}_2^{(n)}\cdot\hat{\boldsymbol{x}} & \boldsymbol{b}_3^{(n)}\cdot\hat{\boldsymbol{x}} & \boldsymbol{b}_4^{(n)}\cdot\hat{\boldsymbol{x}} \end{pmatrix} \\
&\times \begin{pmatrix} \exp\left(\mathrm{j}\frac{\omega}{c}N_{z1}^{(n)}d^{\,(n)}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \exp\left(\mathrm{j}\frac{\omega}{c}N_{z2}^{(n)}d^{\,(n)}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \exp\left(\mathrm{j}\frac{\omega}{c}N_{z3}^{(n)}d^{\,(n)}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \exp\left(\mathrm{j}\frac{\omega}{c}N_{z4}^{(n)}d^{\,(n)}\right) \end{pmatrix} \\
&\times \begin{pmatrix} \mathrm{E}_{01}^{(n)} \\ \mathrm{E}_{02}^{(n)} \\ \mathrm{E}_{03}^{(n)} \\ \mathrm{E}_{04}^{(n)} \end{pmatrix} .
\end{aligned} \tag{4.3.3}$$

Výsledek lze přepsat do stručnějšího tvaru takto

$$\mathbf{D}^{(n-1)}\mathbf{E}_0^{(n-1)} = \mathbf{D}^{(n)}\mathbf{P}^{(n)}\mathbf{E}_0^{(n)} , \tag{4.3.4}$$

neboli

$$\mathbf{E}_0^{(n-1)} = \left(\mathbf{D}^{(n-1)}\right)^{-1}\mathbf{D}^{(n)}\mathbf{P}^{(n)}\mathbf{E}_0^{(n)} , \tag{4.3.5}$$

kde $\mathbf{E}_0^{(n)}$ je čtyřsložkový sloupcový vektor komplexních amplitud vlastních polarizací

$$\mathbf{E}_0^{(n)} = \begin{pmatrix} \mathrm{E}_{01}^{(n)} \\ \mathrm{E}_{02}^{(n)} \\ \mathrm{E}_{03}^{(n)} \\ \mathrm{E}_{04}^{(n)} \end{pmatrix} \tag{4.3.6}$$

a $\mathbf{D}^{(n)}$ je matice 4×4

$$\mathbf{D}^{(n)} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1^{(n)}\cdot\hat{\boldsymbol{x}} & \boldsymbol{e}_2^{(n)}\cdot\hat{\boldsymbol{x}} & \boldsymbol{e}_3^{(n)}\cdot\hat{\boldsymbol{x}} & \boldsymbol{e}_4^{(n)}\cdot\hat{\boldsymbol{x}} \\ \boldsymbol{b}_1^{(n)}\cdot\hat{\boldsymbol{y}} & \boldsymbol{b}_2^{(n)}\cdot\hat{\boldsymbol{y}} & \boldsymbol{b}_3^{(n)}\cdot\hat{\boldsymbol{y}} & \boldsymbol{b}_4^{(n)}\cdot\hat{\boldsymbol{y}} \\ \boldsymbol{e}_1^{(n)}\cdot\hat{\boldsymbol{y}} & \boldsymbol{e}_2^{(n)}\cdot\hat{\boldsymbol{y}} & \boldsymbol{e}_3^{(n)}\cdot\hat{\boldsymbol{y}} & \boldsymbol{e}_4^{(n)}\cdot\hat{\boldsymbol{y}} \\ \boldsymbol{b}_1^{(n)}\cdot\hat{\boldsymbol{x}} & \boldsymbol{b}_2^{(n)}\cdot\hat{\boldsymbol{x}} & \boldsymbol{b}_3^{(n)}\cdot\hat{\boldsymbol{x}} & \boldsymbol{b}_4^{(n)}\cdot\hat{\boldsymbol{x}} \end{pmatrix}, \tag{4.3.7}$$

jejíž prvky $D_{ij}^{(n)}$ plynou z rovnic (4.2.16) nebo (4.2.17) a (4.2.18)

$$D_{1j}^{(n)} = \boldsymbol{e}_j^{(n)}\cdot\hat{\boldsymbol{x}} = C_j^{(n)}\left[-\varepsilon_{xy}^{(n)}\left(\varepsilon_{zz}^{(n)} - N_y^2\right) + \varepsilon_{xz}^{(n)}\left(\varepsilon_{zy}^{(n)} + N_y N_{zj}^{(n)}\right)\right] \tag{4.3.8a}$$

$$D_{2j}^{(n)} = \boldsymbol{b}_j^{(n)}\cdot\hat{\boldsymbol{y}} = C_j^{(n)} N_{zj}^{(n)}\left[-\varepsilon_{xy}^{(n)}\left(\varepsilon_{zz}^{(n)} - N_y^2\right) + \varepsilon_{xz}^{(n)}\left(\varepsilon_{zy}^{(n)} + N_y N_{zj}^{(n)}\right)\right] \tag{4.3.8b}$$

$$D_{3j}^{(n)} = \boldsymbol{e}_j^{(n)}\cdot\hat{\boldsymbol{y}} = C_j^{(n)}\left[\left(\varepsilon_{zz}^{(n)} - N_y^2\right)\left(\varepsilon_{xx}^{(n)} - N_y^2 - N_{zj}^{(n)2}\right) - \varepsilon_{xz}^{(n)}\varepsilon_{zx}^{(n)}\right] \tag{4.3.8c}$$

$$\begin{aligned} D_{4j}^{(n)} = \boldsymbol{b}_j^{(n)}\cdot\hat{\boldsymbol{x}} = C_j^{(n)}\Big[&-\left(\varepsilon_{xx}^{(n)} - N_y^2 - N_{zj}^{(n)2}\right)\left(N_y\varepsilon_{zy}^{(n)} + N_{zj}^{(n)}\varepsilon_{zz}^{(n)}\right) \\ &+ N_{zj}^{(n)}\varepsilon_{xz}^{(n)}\varepsilon_{zx}^{(n)} + N_y\varepsilon_{zx}^{(n)}\varepsilon_{xy}^{(n)}\Big]. \end{aligned} \tag{4.3.8d}$$

Připomínáme poznámku učiněnou v souvislosti s rovnicí (4.2.16) o singularitách v prostředích s vysokou symetrií. Ty je nutno uvážit při tvorbě numerických postupů [7]. Zde $\mathbf{P}^{(n)}$ je diagonální matice

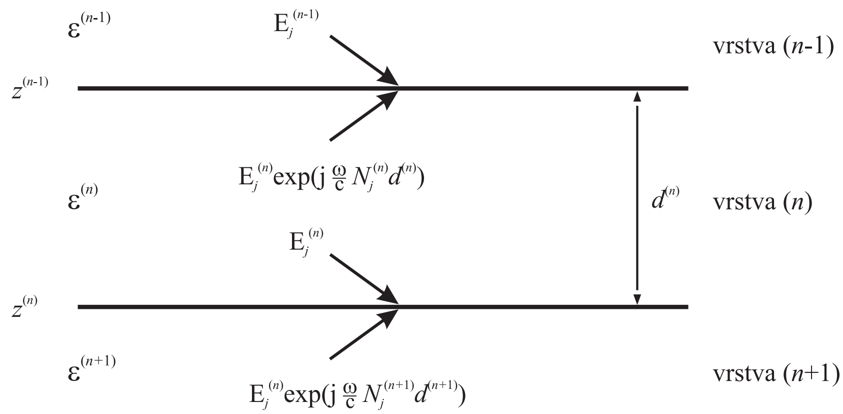
$$\mathbf{P}^{(n)} = \begin{pmatrix} \exp\left(\mathrm{j}\frac{\omega}{c}N_{z1}^{(n)}d^{(n)}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \exp\left(\mathrm{j}\frac{\omega}{c}N_{z2}^{(n)}d^{(n)}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \exp\left(\mathrm{j}\frac{\omega}{c}N_{z3}^{(n)}d^{(n)}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \exp\left(\mathrm{j}\frac{\omega}{c}N_{z4}^{(n)}d^{(n)}\right) \end{pmatrix}. \tag{4.3.9}$$

V tlustých absorbujících vrstvách prvky matice $\mathbf{P}^{(n)}$ mohou být příliš velké, takže překročí kapacitu počítače. V takových vrstvách má procházející vlna zanedbatelnou amplitudu.[5] Problém překročení kapacity počítače lze obejít dělením všech prvků $\mathbf{P}^{(n)}$ vhodným dostatečně velkým faktorem.

Matici $\mathbf{D}^{(n)}$, tzv. *dynamická matice*, matici $\mathbf{P}^{(n)}$, tzv. *propagační matici* (neboli *matici šíření*, a čtyřsložkový vektor $\mathbf{E}^{(n)}$ definoval Yeh [1, 3]. Základ tvoří vztah mezi polem $\mathbf{E}_0^{(n-1)}$ v $(n-1)$-té vrstvě při rozhraní $z = z^{(n-1)}$ a polem $\mathbf{E}_0^{(n)}$ v n-té vrstvě při rozhraní $z = z^{(n)}$ formulovaný rovnicí (4.3.5). Může být vyjádřen pomocí tzv. *matice transferu* neboli *přenosové matice*, kterou definoval Yeh takto

$$\mathbf{T}^{(n-1,n)} = \left(\mathbf{D}^{(n-1)}\right)^{-1}\mathbf{D}^{(n)}\mathbf{P}^{(n)}. \tag{4.3.10}$$

[5] Amplituda vln prošlých touto vrstvou a odražených na jejím druhém rozhraní je rovněž zanedbatelná. Vliv následujících vrstev na odezvu v reflexi je pak zanedbatelný. V praxi je vhodné tlustou silně absorbující vrstvu nahradit vrstvou ze stejného materiálu avšak nekonečné tloušťky, v níž se odraz na druhém rozhraní již neuplatní.



Obr. 4.2: Matice transferu váže amplitudy polí vlastních polarizací $\mathrm{E}_j^{(n-1)}$ ve vrstvě $(n-$ $-1)$ na jejím pravém rozhraní s odpovídajícími amplitudami polí $\mathrm{E}_j^{(n)}$ na pravém rozhraní vrstvy n.

V Yehově formalizmu matic 4×4 tvoří přenosová matice základní stavební prvek (Obr. 4.2). Při nulové tloušťce $d^{(n)} = 0$, dostáváme $\mathbf{P}^{(n)} = 1$. Přenosová matice se zjednoduší na $\mathbf{T}^{(n-1,n)} = \left(\mathbf{D}^{(n-1)}\right)^{-1} \mathbf{D}^{(n)}$ a váže amplitudy polí po obou stranách rozhraní $z = z_{n-1}$ mezi vrstvami $n-1$ a n. V tomto speciálním případě jsou tedy roviny, v nichž zjišťujeme vztahy polí ve vzdálenosti, která je v limitě nulová $(z_n \to z_{n-1})$. Jako v obecných případech i zde mohou být obě prostředí, která jsou v kontaktu, charakterizována zcela obecnými tenzory permitivity. Tento speciální tvar přenosové matice pro $\mathbf{P}^{(n)} = 1$ odpovídá také samotnému rozhraní mezi dvěma poloprostory, které mohou být opět oba charakterizovány obecnými tenzory permitivity. V praxi míváme spíše situace, kdy jedním poloprostorem je vakuum nebo vzduch (kam můžeme umístit zdroj záření i detektor) a druhým obecně anizotropní prostředí. U multivrstev se přenosová matice, v níž je $\mathbf{P}^{(n)} = 1$ uplatňuje jako poslední segment součinu matic reprezentujícího multivrstvu.

To je dáno tím, že součin přenosových matic volíme tak, aby vázal amplitudy polí v obou poloprostorech právě v rovinách, které se infinitesimálně přibližují k rozhraním $z = z^{(0)}$ a $z = z^{(\mathcal{N})}$ s první a poslední vrstvou.

$$\mathbf{E}_0^{(0)} = \prod_{n=1}^{\mathcal{N}+1} \mathbf{T}^{(n-1,n)} \mathbf{E}_0^{(\mathcal{N}+1)} = \mathbf{M}\mathbf{E}_0^{(\mathcal{N}+1)} . \tag{4.3.11}$$

Podle toho, co bylo právě uvedeno poslední přenosová matice v součinu přenosových matic je dána

$$\mathbf{T}^{(\mathcal{N},\mathcal{N}+1)} = \left(\mathbf{D}^{(\mathcal{N})}\right)^{-1} \mathbf{D}^{(\mathcal{N}+1)} . \tag{4.3.12}$$

Průběh polí $\mathbf{E}^{(m)}$ $(1 \leq m \leq \mathcal{N})$ ve zvolené vrstvě (vyplňující oblast $z^{(m-1)} < z <$ $< z^{(m)}$) multivrstevnaté struktury zjistíme z rovnice

$$\mathbf{E}_0^{(m)} = \left(\prod_{n=1}^{m} \mathbf{T}^{(n-1,n)} \right)^{-1} \mathbf{E}_0^{(0)} \tag{4.3.13}$$

neboli

$$\mathbf{E}_0^{(m)} = \prod_{n=m+1}^{\mathcal{N}+1} \mathbf{T}^{(n-1,n)} \mathbf{E}_0^{(\mathcal{N}+1)} \tag{4.3.14}$$

za předpokladu, že sloupcový čtyřsložkový vektor $\mathbf{E}_0^{(0)}$ nebo $\mathbf{E}_0^{(\mathcal{N}+1)}$ je znám z řešení rovnice (4.3.11). Průběh polí uvnitř m-té vrstvy plyne z rovnice

$$\begin{pmatrix} \mathrm{E}_{01}^{(m)}(z) \\ \mathrm{E}_{02}^{(m)}(z) \\ \mathrm{E}_{03}^{(m)}(z) \\ \mathrm{E}_{04}^{(m)}(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_1^{(m)}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_2^{(m)}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_3^{(m)}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_4^{(m)}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{E}_{01}^{(m)}\left(z^{(m)}\right) \\ \mathrm{E}_{02}^{(m)}\left(z^{(m)}\right) \\ \mathrm{E}_{03}^{(m)}\left(z^{(m)}\right) \\ \mathrm{E}_{04}^{(m)}\left(z^{(m)}\right) \end{pmatrix}, \tag{4.3.15}$$

kde $\beta_j^{(m)} = \dfrac{\omega}{c} N_{zj}^{(m)}(z^{(m)} - z)$ for $j = 1 \cdots 4$.

Není nutné normalizovat módy charakterizované $\boldsymbol{e}_j^{(n)}$ s výjimkou $n = 0$ a $\mathcal{N}+1$, pokud nás zajímají pouze pole v poloprostorech obklopujících multivrstvu. Abychom to ukázali, předpokládejme, že vektory vlastních polarizací $\boldsymbol{e}_j^{(n)}$ ve vrstvě n uvnitř struktury ($n \neq 0$ a $n \neq \mathcal{N}+1$) nejsou normalizovány. Když položíme normalizační koeficienty z rovnice (4.2.16) nebo (4.2.17) všechny rovné jedné, (čímž je ve skutečnosti odstraníme) změní se dynamická matice $\mathbf{D}^{(n)}$ zkonstruovaná užitím normalizovaných $\boldsymbol{e}_j^{(n)}$ na dynamickou matidci sestavenou užitím nenormalizovaných vektorů vlastních polarizací elektrického pole. Můžeme ji pak zapsat takto $\left[\mathbf{D}^{(n)}\left(\mathbf{C}^{(n)}\right)^{-1}\right]$. Vložení jednotkové matice $\left(\mathbf{C}^{(n)}\right)^{-1}\mathbf{C}^{(n)} = 1$ na pravé straně rovnice (4.3.5) máme

$$\mathbf{E}_0^{(n-1)} = \left(\mathbf{D}^{(n-1)}\right)^{-1}\left[\mathbf{D}^{(n)}\left(\mathbf{C}^{(n)}\right)^{-1}\right]\mathbf{P}^{(n)}\mathbf{C}^{(n)}\mathbf{E}_0^{(n)}, \tag{4.3.16}$$

kde $\mathbf{C}^{(n)}$ je diagonální matice 4×4 normalizačních koeficientů z rovnice (4.2.16)

$$\mathbf{C}^{(n)} = \begin{pmatrix} C_1^{(n)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_2^{(n)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_3^{(n)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_4^{(n)} \end{pmatrix}. \tag{4.3.17}$$

Použili jsme přitom okolnost, že diagonální matice $\mathbf{P}^{(n)}$ a $\mathbf{C}^{(n)}$ komutují. Nyní vyjádříme $\mathbf{E}_0^{(n)}$ pomocí součinu přenosové matice $\mathbf{T}^{(n,n+1)}$ a $\mathbf{E}_0^{(n+1)}$ jako v rovnici (4.3.5)

$$\mathbf{E}_0^{(n)} = \mathbf{T}^{(n,n+1)}\mathbf{E}_0^{(n+1)} \tag{4.3.18}$$

použijeme definici přenosové matice podle rovnice (4.3.10) a dostaneme

$$\mathbf{E}_0^{(n-1)} = \left(\mathbf{D}^{(n-1)}\right)^{-1}\left[\mathbf{D}^{(n)}\left(\mathbf{C}^{(n)}\right)^{-1}\right]\mathbf{P}^{(n)}\left[\mathbf{C}^{(n)}\left(\mathbf{D}^{(n)}\right)^{-1}\right]\mathbf{D}^{(n+1)}\mathbf{P}^{(n+1)}\mathbf{E}_0^{(n+1)}, \tag{4.3.19}$$

kde

$$\left[\mathbf{D}^{(n)}\left(\mathbf{C}^{(n)}\right)^{-1}\right]^{-1} = \left[\mathbf{C}^{(n)}\left(\mathbf{D}^{(n)}\right)^{-1}\right]. \tag{4.3.20}$$

Tím jsme ukázali, že vztah mezi $\mathbf{E}_0^{(n-1)}$ a $\mathbf{E}_0^{(n+1)}$ nezávisí na $\mathbf{C}^{(n)}$.

V principu je osm složek $\mathbf{E}^{(0)}$ a $\mathbf{E}_0^{(\mathcal{N}+1)}$ vázáno čtyřmi rovnicemi (4.3.11). Obecněji, $(\mathcal{N}+1)$ přenosových matic váže $4(\mathcal{N}+2)$ složek $\mathbf{E}_0^{(m)}$. Pole ve struktuře budou potom určena, když budou dány všechny čtyři složky libovolného vektoru $\mathbf{E}_0^{(m)}$ za předpokladu, že odpovídající vlastní polarizace jsou normovány . Navíc tento vektor se nemusí vztahovat k pravému rozhraní vrstvy. Tak jsme totiž $\mathbf{E}_0^{(m)}$ definovali. Postačí, když budou specifikovány modální amplitudy $\mathrm{E}_{0j}^{(m)}(z)$ normovaných vlastních polarizací v libovolné rovině $z^{(m-1)} < z < z^{(m)}$ kolmé na z osu uvnitř m-té. Ty jsou jednoduše vázány na amplitudy $\mathrm{E}_{0j}^{(m)} = \mathrm{E}_{0j}^{(m)}\left(z^{(m)}\right)$ při rozhraní $z = z^{(m)}$ rovnicí (4.3.15).

4.4 Vlny v izotropních oblastech

Nyní vytvoříme dynamické a propagační matice pro nejjednodušší případ izotropních vrstev a izotropních poloprostorů obklopujících multivrstvu. Izotropní poloprostory $z < z^{(0)}$ a $z > z^{(\mathcal{N})}$ jsou charakterizovány izotropními skalárními relativními permitivitami $\varepsilon^{(s)} = \left(N^{(s)}\right)^2$, kde $s = 0$ nebo $\mathcal{N}+1$. Vektory šíření nabývají dvojí možné hodnoty

$$\gamma_{\pm}^{(s)} = \frac{\omega}{c}\left[N_y\hat{\boldsymbol{y}} \pm \left(N^{(s)2} - N_y^2\right)^{1/2}\hat{\boldsymbol{z}}\right] . \tag{4.4.1}$$

V neabsorbujících izotropních poloprostorech a ve vrstvách, které neabsorbují, jsou extinkční koeficienty nulové, tj. $k^{(s)} = 0$ pro $s = 0$, $s = \mathcal{N}+1$, a pro ta s, ze souboru 1 s $\mathcal{N}$, která odpovídají neabsorbujícím vrstvám. Navíc v oblastech, kde $k^{(s)} = 0$ můžeme definovat reálné úhly dopadu, odrazu a lomu (za předpokladu, že není překročen kritický úhel pro úplný odraz). Vektory šíření s kladnou a zápornou normálovou složkou budou

$$\gamma_{\pm}^{(s)} = \frac{\omega}{c}N^{(s)}\left[\hat{\boldsymbol{y}}\sin\varphi^{(s)} \pm \hat{\boldsymbol{z}}\cos\varphi^{(s)}\right] . \tag{4.4.2}$$

Dosazením do vlnové rovnice (4.2.12) zjistíme, že vlastní polarizační módy lze vždy zvolit tak, aby byly tvořeny dvěma páry ortogonálních elipticky polarizovaných vln.

Ortogonálně elipticky polarizované příčné elektromagnetické vlny postupující s *kladným* průmětem vektoru šíření na osu z a s vlastními polarizacemi $\boldsymbol{e}_1^{(s)}$ a $\boldsymbol{e}_3^{(s)}$ na jedné straně a ortogonálně elipticky polarizované příčné vlny postupující se *záporným* průmětem vektoru šíření na osu z a s vlastními polarizacemi $\boldsymbol{e}_2^{(s)}$ a $\boldsymbol{e}_4^{(s)}$ na straně druhé jsou charakterizovány (až na komplexní amplitudy) poli $(\varphi^{(s)} = 0)$

$$\boldsymbol{e}_{1,2}^{(s)}\exp\left(\mathrm{j}\omega t \mp \mathrm{j}\frac{\omega}{c}N^{(s)}z\right) = \left(\hat{\boldsymbol{x}}p^{(s)} + \hat{\boldsymbol{y}}q^{(s)}\right)\exp\left(\mathrm{j}\omega t \mp \mathrm{j}\frac{\omega}{c}N^{(s)}z\right) , \tag{4.4.3a}$$

$$\boldsymbol{e}_{3,4}^{(s)}\exp\left(\mathrm{j}\omega t \mp \mathrm{j}\frac{\omega}{c}N^{(s)}z\right) = \left(-\hat{\boldsymbol{x}}q^{(s)*} + \hat{\boldsymbol{y}}p^{(s)*}\right)\exp\left(\mathrm{j}\omega t \mp \mathrm{j}\frac{\omega}{c}N^{(s)}z\right) . \tag{4.4.3b}$$

Tyto normalizované ortogonální vlastní polarizace mohou být zapsány jako kartézské sloupcové vektory [3]

$$\boldsymbol{e}_{1,2}^{(s)} = \begin{pmatrix} p^{(s)} \\ q^{(s)} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.4.4}$$

and

$$\boldsymbol{e}_{3,4}^{(s)} = \begin{pmatrix} -q^{(s)*} \\ p^{(s)*} \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{4.4.5}$$

kde komplexní čísla $p^{(s)}$ and $q^{(s)}$ splňují normalizační podmínku

$$p^{(s)}p^{(s)*} + q^{(s)}q^{(s)*} = 1\,. \tag{4.4.6}$$

V neabsorbujících prostředích [6]

$$p^{(s)} = \cos\theta^{(s)}\cos\epsilon^{(s)} - \mathrm{j}\sin\theta^{(s)}\sin\epsilon^{(s)}, \tag{4.4.7a}$$
$$q^{(s)} = \sin\theta^{(s)}\cos\epsilon^{(s)} + \mathrm{j}\cos\theta^{(s)}\sin\epsilon^{(s)}\,, \tag{4.4.7b}$$

kde $\theta^{(s)}$ resp. $\operatorname{tg}\epsilon^{(s)}$ jsou azimut resp. elipticita polarizované vlny. Odpovídající ortogonálně polarizovaná vlna postupující ve stejném smyslu je specifikována azimutem $\theta + \pi/2$ a elipticitou stejné velikosti, ale opačného znaménka $-\operatorname{tg}\epsilon$. Ve speciálním případě dostaneme soubor normalizovaných ortogonálních vln polarizovaných rovnoběžně s vektory $\hat{\boldsymbol{x}}$ a $\hat{\boldsymbol{y}}$. K tomu stačí zvolit $\theta = 0$ a $\pi/2$ a současně $\operatorname{tg}\epsilon = 0$. Volba odpovídá $p = 1$ a $q = 0$

$$\boldsymbol{e}_{1,2}^{(s)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.4.8}$$

a

$$\boldsymbol{e}_{3,4}^{(s)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{4.4.9}$$

Jeden z možných normovaných ortogonálních souborů s pravotočivou kruhovou polarizací RCP (anglicky – right circularly polarized) a s levotočivou kruhovou polarizací LCP (anglicky – left circularly polarized) získáme, když na jedné straně položíme $\theta = \pi/4$ a $\epsilon = \pi/4$ pro RCP a $\theta = -\pi/4$ a $\epsilon = -\pi/4$ pro LCP na straně druhé.[6]

Volba potom odpovídá $p = (1-\mathrm{j})/2$ a $q = (1+\mathrm{j})/2$

$$\boldsymbol{e}_{1,2}^{(s)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1-\mathrm{j} \\ 1+\mathrm{j} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1+\mathrm{j}}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{j} \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{4.4.10}$$

a

$$\boldsymbol{e}_{3,4}^{(s)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1-\mathrm{j} \\ -1-\mathrm{j} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1+\mathrm{j}}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{j} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1+\mathrm{j}}{4}\begin{pmatrix} \mathrm{j} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{4.4.11}$$

Abychom dostali vyjádření pro pole při obecné orientaci vektoru šíření v rovině dopadu $x = 0$ (tj. kolmé na $\hat{\boldsymbol{x}}$) použijeme rotaci o úhel $\pm\varphi^{(s)}$.

[6] Klasifikace RCP a LCP vyžaduje ještě specifikaci smyslu vektoru šíření. Změna jeho smyslu na opačný transformuje RCP na LCP a naopak.

Pro módy postupující s vektorem šíření $\gamma_+^{(s)}$ takto dostaneme

$$\boldsymbol{e}_1^{(s)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi^{(s)} & \sin\varphi^{(s)} \\ 0 & -\sin\varphi^{(s)} & \cos\varphi^{(s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^{(s)} \\ q^{(s)} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^{(s)} \\ q^{(s)}\cos\varphi^{(s)} \\ -q^{(s)}\sin\varphi^{(s)} \end{pmatrix}, \tag{4.4.12}$$

a podobně

$$\boldsymbol{e}_3^{(s)} = \begin{pmatrix} -q^{(s)*} \\ p^{(s)*}\cos\varphi^{(s)} \\ -p^{(s)*}\sin\varphi^{(s)} \end{pmatrix}. \tag{4.4.13}$$

Pro vektor šíření $\gamma_-^{(s)}$ s opačnou orientací (s opačným znaménkem) jeho normálové složky máme

$$\boldsymbol{e}_2^{(s)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi^{(s)} & -\sin\varphi^{(s)} \\ 0 & \sin\varphi^{(s)} & \cos\varphi^{(s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^{(s)} \\ q^{(s)} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^{(s)} \\ q^{(s)}\cos\varphi^{(s)} \\ q^{(s)}\sin\varphi^{(s)} \end{pmatrix}, \tag{4.4.14}$$

a podobně

$$\boldsymbol{e}_4^{(s)} = \begin{pmatrix} -q^{(s)*} \\ p^{(s)*}\cos\varphi^{(s)} \\ p^{(s)*}\sin\varphi^{(s)} \end{pmatrix}. \tag{4.4.15}$$

V neabsorbujících prostředích můžeme psát $N_y = N^{(s)}\sin\varphi^{(s)}$ kde $N^{(s)}$ a $\varphi^{(s)}$ jsou reálné veličiny. Pro magnetická pole vln postupujících s vektorem šíření $\gamma_+^{(s)}$ užitím rovnice (4.2.19) dostaneme

$$\boldsymbol{b}_1^{(s)} = N^{(s)} \begin{pmatrix} -q^{(s)} \\ p^{(s)}\cos\varphi^{(s)} \\ -p^{(s)}\sin\varphi^{(s)} \end{pmatrix}, \tag{4.4.16a}$$

$$\boldsymbol{b}_3^{(s)} = N^{(s)} \begin{pmatrix} -p^{(s)*} \\ -q^{(s)}\cos\varphi^{(s)} \\ q^{(s)*}\sin\varphi^{(s)} \end{pmatrix} \tag{4.4.16b}$$

a pro vlny postupující s vektorem šíření $\gamma_-^{(s)}$

$$\boldsymbol{b}_2^{(s)} = N^{(s)} \begin{pmatrix} q^{(s)} \\ -p^{(s)}\cos\varphi^{(s)} \\ -p^{(s)}\sin\varphi^{(s)} \end{pmatrix}, \tag{4.4.16c}$$

$$\boldsymbol{b}_4^{(s)} = N^{(s)} \begin{pmatrix} p^{(s)*} \\ q^{(s)*}\cos\varphi^{(s)} \\ q^{(s)*}\sin\varphi^{(s)} \end{pmatrix}. \tag{4.4.16d}$$

Číslování vlastních hodnot vektoru šíření je věcí volby. Zde volíme

$$\gamma_1^{(s)} = \gamma_3^{(s)} = \gamma_+^{(s)} \tag{4.4.17a}$$
$$\gamma_2^{(s)} = \gamma_4^{(s)} = \gamma_-^{(s)} \tag{4.4.17b}$$

pro vlnu postupující vpřed, tj. vlnu s kladným průmětem normálové složky vektoru šíření na osu ($\gamma_+^{(s)}$) a pro zpětnou vlnu, tj. vlnu se záporným průmětem normálové složky vektoru šíření na osu ($\gamma_-^{(s)}$) Stejně číslujeme odpovídající vlastní polarizace. Volba specifického číslování módů pochopitelně ovlivňuje uspořádání v dynamické a propagační matici a tedy i v přenosové matici.

V izotropních neabsorbujících prostředích $\hat{\boldsymbol{e}}_j^{(s)} \cdot \hat{\boldsymbol{b}}_j^{(s)} = 0$, $\hat{\boldsymbol{e}}_j^{(s)} \cdot \gamma_j^{(s)} = 0$, a $\hat{\boldsymbol{b}}_j^{(s)} \cdot \gamma_j^{(s)} = 0$, pro $j = 1, \ldots, 4$. Odpovídající (tj. se stejným j) vektory šíření a Poyntingovy vektory jsou rovnoběžné. Vlastní polarizace vln postupujících ve stejném smyslu lze zvolit navzájem ortogonální. Pro vlny postupující vpřed to znamená $\hat{\boldsymbol{e}}_1^{(s)} \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_3^{(s)} = 0$. Podobně pro zpětně postupující vlny máme $\hat{\boldsymbol{e}}_2^{(s)} \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_4^{(s)} = 0$. V obecně anizotropních absorbujících prostředích, jako jsou anizotropní absorbující prostředí s magnetickým uspořádáním, tyto relace již automaticky splněny nejsou.

Užitím rovnic (4.3.8), můžeme dynamickou matici $\mathbf{D}^{(s)}$ v izotropních prostředích psát

$$\mathbf{D}^{(s)} = \begin{pmatrix} p^{(s)} & p^{(s)} & -q^{(s)*} & -q^{(s)*} \\ N^{(s)} p^{(s)} \cos\varphi^{(s)} & -N^{(s)} p^{(s)} \cos\varphi^{(s)} & -N^{(s)} q^{(s)*} \cos\varphi^{(s)} & N^{(s)} q^{(s)*} \cos\varphi^{(s)} \\ q^{(s)} \cos\varphi^{(s)} & q^{(s)} \cos\varphi^{(s)} & p^{(s)*} \cos\varphi^{(s)} & p^{(s)*} \cos\varphi^{(s)} \\ -N^{(s)} q^{(s)} & N^{(s)} q^{(s)} & -N^{(s)} p^{(s)*} & N^{(s)} p^{(s)*} \end{pmatrix}, \tag{4.4.18}$$

Pro matici k ní inverzní dostaneme

$$\left(\mathbf{D}^{(s)}\right)^{-1} = \left(2N^{(s)} \cos\varphi^{(s)}\right)^{-1} \begin{pmatrix} N^{(s)} p^{(s)*} \cos\varphi^{(s)} & p^{(s)*} & N^{(s)} q^{(s)*} & -q^{(s)*} \cos\varphi^{(s)} \\ N^{(s)} p^{(s)*} \cos\varphi^{(s)} & -p^{(s)*} & N^{(s)} q^{(s)*} & q^{(s)*} \cos\varphi^{(s)} \\ -N^{(s)} q^{(s)} \cos\varphi^{(s)} & -q^{(s)} & N^{(s)} p^{(s)} & -p^{(s)} \cos\varphi^{(s)} \\ -N^{(s)} q^{(s)} \cos\varphi^{(s)} & q^{(s)} & N^{(s)} p^{(s)} & p^{(s)} \cos\varphi^{(s)} \end{pmatrix}. \tag{4.4.19}$$

Matice šíření v izotropních prostředích bude

$$\boldsymbol{P}^{(s)} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta^{(s)}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta^{(s)}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta^{(s)}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta^{(s)}} \end{pmatrix}, \tag{4.4.20}$$

kde $\beta^{(s)} = (\omega/c) \left(N^{(s)2} - N_y^2\right)^{1/2} d^{(s)}$.

4.5 Odraz a průchod

Rovnice (4.3.8) a (4.3.9) pro anizotropní oblasti a rovnice (4.4.18) – (4.4.20) pro izotropní oblasti nám umožňují zkonstruovat matice přenosu definované rovnicí (4.3.10) pro n rovné jedné až $(\mathcal{N} + 1)$. Podle rovnice (4.3.11), součin matic přenosu dává celkovou matici multivrstevnaté struktury $\mathbf{M}$

$$\begin{pmatrix} \mathrm{E}_{01}^{(0)} \\ \mathrm{E}_{02}^{(0)} \\ \mathrm{E}_{03}^{(0)} \\ \mathrm{E}_{04}^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{M}_{11} & \mathrm{M}_{12} & \mathrm{M}_{13} & \mathrm{M}_{14} \\ \mathrm{M}_{21} & \mathrm{M}_{22} & \mathrm{M}_{23} & \mathrm{M}_{24} \\ \mathrm{M}_{31} & \mathrm{M}_{32} & \mathrm{M}_{33} & \mathrm{M}_{34} \\ \mathrm{M}_{41} & \mathrm{M}_{42} & \mathrm{M}_{43} & \mathrm{M}_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{E}_{01}^{(\mathcal{N}+1)} \\ \mathrm{E}_{02}^{(\mathcal{N}+1)} \\ \mathrm{E}_{03}^{(\mathcal{N}+1)} \\ \mathrm{E}_{04}^{(\mathcal{N}+1)} \end{pmatrix} . \tag{4.5.1}$$

Rovnice (4.5.1) poskytuje hledanou informaci o elektromagnetické odezvě multivrstevnaté struktury na pole vln dopadajících z obklopujících poloprostorů. Ke zjednodušení situace volíme amplitudy vln dopadajících z jednoho izotropního poloprostoru nulové. Zvolíme například jako nulové amplitudy vln dopadajících z poloprostoru $(\mathcal{N}+1)$. Potom pro $z > z^{(\mathcal{N})}$

$$\mathrm{E}_{02}^{(\mathcal{N}+1)} = \mathrm{E}_{04}^{(\mathcal{N}+1)} = 0 \,, \tag{4.5.2}$$

což rovnici (4.5.1) zjednodušuje na

$$\begin{pmatrix} \mathrm{E}_{01}^{(0)} \\ \mathrm{E}_{02}^{(0)} \\ \mathrm{E}_{03}^{(0)} \\ \mathrm{E}_{04}^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{M}_{11} & \mathrm{M}_{12} & \mathrm{M}_{13} & \mathrm{M}_{14} \\ \mathrm{M}_{21} & \mathrm{M}_{22} & \mathrm{M}_{23} & \mathrm{M}_{24} \\ \mathrm{M}_{31} & \mathrm{M}_{32} & \mathrm{M}_{33} & \mathrm{M}_{34} \\ \mathrm{M}_{41} & \mathrm{M}_{42} & \mathrm{M}_{43} & \mathrm{M}_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{E}_{01}^{(\mathcal{N}+1)} \\ 0 \\ \mathrm{E}_{03}^{(\mathcal{N}+1)} \\ 0 \end{pmatrix} . \tag{4.5.3}$$

Díky tomu můžeme jednodušeji popsat odezvu multivrstvy na pole vln dopadajících z poloprostoru 0 vyplňujícího oblast $z < z^{(0)}$. Naopak za předpokladu, že ke struktuře nepřicházejí žádné vlny z poloprostoru (0), máme pro $z < z^{(0)}$

$$\mathrm{E}_{01}^{(0)} = \mathrm{E}_{03}^{(0)} = 0 \,. \tag{4.5.4}$$

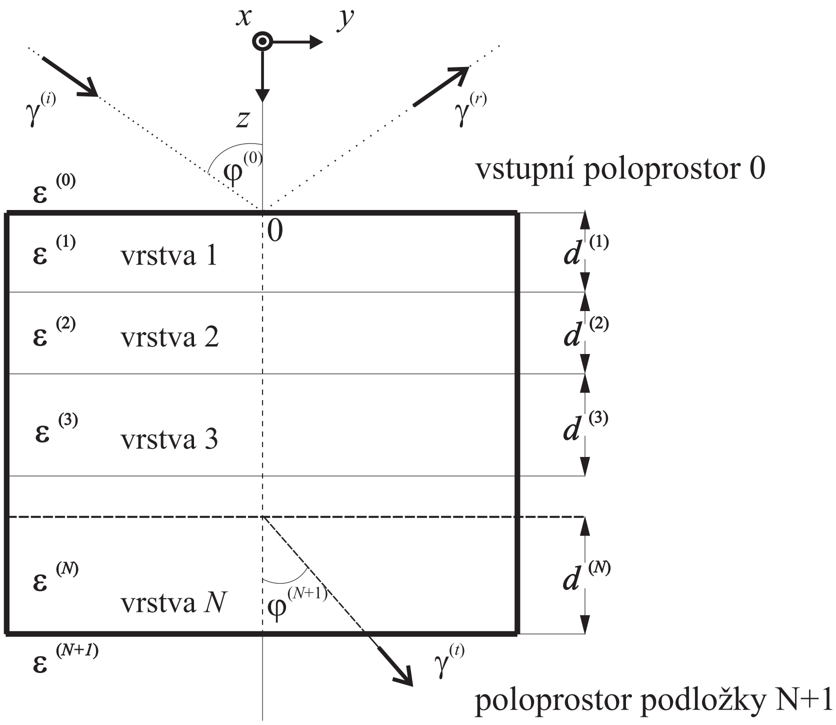
Tím se rovnice (4.5.1) zjednoduší na

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{E}_{02}^{(0)} \\ 0 \\ \mathrm{E}_{04}^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{M}_{11} & \mathrm{M}_{12} & \mathrm{M}_{13} & \mathrm{M}_{14} \\ \mathrm{M}_{21} & \mathrm{M}_{22} & \mathrm{M}_{23} & \mathrm{M}_{24} \\ \mathrm{M}_{31} & \mathrm{M}_{32} & \mathrm{M}_{33} & \mathrm{M}_{34} \\ \mathrm{M}_{41} & \mathrm{M}_{42} & \mathrm{M}_{43} & \mathrm{M}_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{E}_{01}^{(\mathcal{N}+1)} \\ \mathrm{E}_{02}^{(\mathcal{N}+1)} \\ \mathrm{E}_{03}^{(\mathcal{N}+1)} \\ \mathrm{E}_{04}^{(\mathcal{N}+1)} \end{pmatrix} . \tag{4.5.5}$$

Vraťme se nyní k případu popsaném rovnicí (4.5.3) a předpokládejme, že dvě navzájem ortogonálně polarizované *dopadající* vlny postupují ke struktuře z izotropního poloprostoru $z < z^{(0)}$ (Figure 4.3). Připomínáme, že amplitudy těchto vln jsou označeny $\mathrm{E}_{01}^{(0)}$ are $\mathrm{E}_{03}^{(0)}$ a jejich vektory vlastních polarizací jsou v souladu s rovnicemi (4.4.12) a (4.4.13) dány

$$\boldsymbol{e}_1^{(0)} = \begin{pmatrix} p^{(0)} \\ q^{(0)} \cos\varphi^{(0)} \\ -q^{(0)} \sin\varphi^{(0)} \end{pmatrix} , \tag{4.5.6a}$$

$$\boldsymbol{e}_3^{(0)} = \begin{pmatrix} -q^{(0)*} \\ p^{(0)*} \cos\varphi^{(0)} \\ -p^{(0)*} \sin\varphi^{(0)} \end{pmatrix} \tag{4.5.6b}$$



Obr. 4.3: Průřez anizotropní multivrstevnatou strukturou tvořenou $\mathcal{N}$ anizotropními vrstvami charakterizovanými tenzory permitivity $\varepsilon^{(n)}$, kde $n = 1, \cdots ,\mathcal{N}$. Vektory šíření dopadající, odražené a procházející vlny v obklopujících izotropních neabsorbujících poloprostorech (0) a $(\mathcal{N}+1)$ jsou označeny po řadě $\gamma^{(i)}$, $\gamma^{(r)}$, a $\gamma^{(t)}$. Zde $\varphi^{(0)}$ označuje úhel dopadu a $\varphi^{(\mathcal{N}+1)}$ označuje úhel lomu na výstupu ze struktury.

kde $\varphi^{(0)}$ označuje úhel dopadu.

Předpokládáme dále existenci dvou ortogonálně polarizovaných *odražených* vln postupujících od struktury do izotropního poloprostoru $z < z^{(0)}$. Jejich amplitudy budou $\mathrm{E}_{02}^{(0)}$ are $\mathrm{E}_{04}^{(0)}$ a jejich vlastní polarizační vektory budou v souladu s rovnicemi (4.4.12) a (4.4.13), vyjádřeny

$$\boldsymbol{e}_2^{(0)} = \begin{pmatrix} p^{(0)} \\ q^{(0)} \cos\varphi^{(0)} \\ q^{(0)} \sin\varphi^{(0)} \end{pmatrix}, \tag{4.5.6c}$$

$$\boldsymbol{e}_4^{(0)} = \begin{pmatrix} -q^{(0)*} \\ p^{(0)*} \cos\varphi^{(0)} \\ p^{(0)*} \sin\varphi^{(0)} \end{pmatrix} \tag{4.5.6d}$$

kde $\varphi^{(0)}$ označuje úhel dopadu rovný úhlu odrazu.

Předpokládáme dále existenci dvojice ortogonálně polarizovaných vln *procházejících* strukturou do izotropního poloprostoru $(\mathcal{N}+1)$ v oblasti $z > z^{(\mathcal{N})}$. Jejich amplitudy jsou $\mathrm{E}_{01}^{(\mathcal{N}+1)}$ a $\mathrm{E}_{03}^{(\mathcal{N}+1)}$ a jejich vektory vlastních polarizací jsou v souladu s rovnicemi (4.4.12) a (4.4.13) dány

$$\boldsymbol{e}_1^{(\mathcal{N}+1)} = \begin{pmatrix} p^{(\mathcal{N}+1)} \\ q^{(\mathcal{N}+1)} \cos\varphi^{(\mathcal{N}+1)} \\ -q^{(\mathcal{N}+1)} \sin\varphi^{(\mathcal{N}+1)} \end{pmatrix}, \tag{4.5.7a}$$

$$\boldsymbol{e}_3^{(\mathcal{N}+1)} = \begin{pmatrix} -q^{(\mathcal{N}+1)*} \\ p^{(\mathcal{N}+1)*} \cos\varphi^{(\mathcal{N}+1)} \\ -p^{(\mathcal{N}+1)*} \sin\varphi^{(\mathcal{N}+1)} \end{pmatrix}, \tag{4.5.7b}$$

kde $\varphi^{(\mathcal{N}+1)}$ označuje úhel lomu.

Pomocí ortogonálně polarizovaných vlastních módů dopadajících, odražených a procházejících vln v obklopujících poloprostorech můžeme definovat *globální reflexní a transmisní koeficienty* (žádné dopadající vlny nepostupují ke struktuře z poloprostoru $(\mathcal{N}+1)$, který vyplňuje oblast $z > z^{(\mathcal{N})}$)

$$r_{21}^{(0,\mathcal{N}+1)} = \left(\frac{\mathrm{E}_{02}^{(0)}}{\mathrm{E}_{01}^{(0)}}\right)_{\mathrm{E}_{03}^{(0)}=0} = \frac{\mathrm{M}_{21}\mathrm{M}_{33} - \mathrm{M}_{23}\mathrm{M}_{31}}{\mathrm{M}_{11}\mathrm{M}_{33} - \mathrm{M}_{13}\mathrm{M}_{31}}, \tag{4.5.8a}$$

$$r_{41}^{(0,\mathcal{N}+1)} = \left(\frac{\mathrm{E}_{04}^{(0)}}{\mathrm{E}_{01}^{(0)}}\right)_{\mathrm{E}_{03}^{(0)}=0} = \frac{\mathrm{M}_{41}\mathrm{M}_{33} - \mathrm{M}_{43}\mathrm{M}_{31}}{\mathrm{M}_{11}\mathrm{M}_{33} - \mathrm{M}_{13}\mathrm{M}_{31}}, \tag{4.5.8b}$$

$$r_{43}^{(0,\mathcal{N}+1)} = \left(\frac{\mathrm{E}_{04}^{(0)}}{\mathrm{E}_{03}^{(0)}}\right)_{\mathrm{E}_{01}^{(0)}=0} = \frac{\mathrm{M}_{11}\mathrm{M}_{43} - \mathrm{M}_{41}\mathrm{M}_{13}}{\mathrm{M}_{11}\mathrm{M}_{33} - \mathrm{M}_{13}\mathrm{M}_{31}}, \tag{4.5.8c}$$

$$r_{23}^{(0,\mathcal{N}+1)} = \left(\frac{\mathrm{E}_{02}^{(0)}}{\mathrm{E}_{03}^{(0)}}\right)_{\mathrm{E}_{01}^{(0)}=0} = \frac{\mathrm{M}_{11}\mathrm{M}_{23} - \mathrm{M}_{21}\mathrm{M}_{13}}{\mathrm{M}_{11}\mathrm{M}_{33} - \mathrm{M}_{13}\mathrm{M}_{31}}, \tag{4.5.8d}$$

$$t_{11}^{(0,\mathcal{N}+1)} = \left(\frac{\mathrm{E}_{01}^{(\mathcal{N}+1)}}{\mathrm{E}_{01}^{(0)}}\right)_{\mathrm{E}_{03}^{(0)}=0} = \frac{\mathrm{M}_{33}}{\mathrm{M}_{11}\mathrm{M}_{33} - \mathrm{M}_{13}\mathrm{M}_{31}}, \tag{4.5.8e}$$

$$t_{31}^{(0,\mathcal{N}+1)} = \left(\frac{\mathrm{E}_{03}^{(\mathcal{N}+1)}}{\mathrm{E}_{01}^{(0)}}\right)_{\mathrm{E}_{03}^{(0)}=0} = \frac{-\mathrm{M}_{31}}{\mathrm{M}_{11}\mathrm{M}_{33} - \mathrm{M}_{13}\mathrm{M}_{31}}, \tag{4.5.8f}$$

$$t_{33}^{(0,\mathcal{N}+1)} = \left(\frac{\mathrm{E}_{03}^{(\mathcal{N}+1)}}{\mathrm{E}_{03}^{(0)}}\right)_{\mathrm{E}_{01}^{(0)}=0} = \frac{\mathrm{M}_{11}}{\mathrm{M}_{11}\mathrm{M}_{33} - \mathrm{M}_{13}\mathrm{M}_{31}}, \tag{4.5.8g}$$

$$t_{13}^{(0,\mathcal{N}+1)} = \left(\frac{\mathrm{E}_{01}^{(\mathcal{N}+1)}}{\mathrm{E}_{03}^{(0)}}\right)_{\mathrm{E}_{01}^{(0)}=0} = \frac{-\mathrm{M}_{13}}{\mathrm{M}_{11}\mathrm{M}_{33} - \mathrm{M}_{13}\mathrm{M}_{31}}. \tag{4.5.8h}$$

Zjišťujeme platnost vztahů

$$t_{11}^{(0,\mathcal{N}+1)} t_{33}^{(0,\mathcal{N}+1)} - t_{31}^{(0,\mathcal{N}+1)} t_{13}^{(0,\mathcal{N}+1)} = \frac{1}{\mathrm{M}_{11}\mathrm{M}_{33} - \mathrm{M}_{13}\mathrm{M}_{31}}, \tag{4.5.9a}$$

$$r_{21}^{(0,\mathcal{N}+1)} r_{43}^{(0,\mathcal{N}+1)} - r_{41}^{(0,\mathcal{N}+1)} r_{23}^{(0,\mathcal{N}+1)} = \frac{\mathrm{M}_{21}\mathrm{M}_{43} - \mathrm{M}_{23}\mathrm{M}_{41}}{\mathrm{M}_{11}\mathrm{M}_{33} - \mathrm{M}_{13}\mathrm{M}_{31}}. \tag{4.5.9b}$$

Analogicky můžeme definovat globální reflexní a transmisní koeficienty pro případ, kdy žádné vlny nepostupují ke struktuře z poloprostoru (0) vyplňujícího oblast $z < z^{(0)}$ charakterizovaný rovnicemi (4.5.4) a (4.5.5)

$$r_{12}^{(\mathcal{N}+1,\,0)} = \left(\frac{\mathrm{E}_{01}^{(\mathcal{N}+1)}}{\mathrm{E}_{02}^{(\mathcal{N}+1)}}\right)_{\mathrm{E}_{04}^{(\mathcal{N}+1)}=0} = \frac{\mathrm{M}_{13}\mathrm{M}_{32}-\mathrm{M}_{12}\mathrm{M}_{33}}{\mathrm{M}_{11}\mathrm{M}_{33}-\mathrm{M}_{13}\mathrm{M}_{31}}\,, \tag{4.5.10a}$$

$$r_{32}^{(\mathcal{N}+1,\,0)} = \left(\frac{\mathrm{E}_{03}^{(\mathcal{N}+1)}}{\mathrm{E}_{02}^{(\mathcal{N}+1)}}\right)_{\mathrm{E}_{04}^{(\mathcal{N}+1)}=0} = \frac{\mathrm{M}_{12}\mathrm{M}_{31}-\mathrm{M}_{11}\mathrm{M}_{32}}{\mathrm{M}_{11}\mathrm{M}_{33}-\mathrm{M}_{13}\mathrm{M}_{31}}\,, \tag{4.5.10b}$$

$$r_{34}^{(\mathcal{N}+1,\,0)} = \left(\frac{\mathrm{E}_{03}^{(\mathcal{N}+1)}}{\mathrm{E}_{04}^{(\mathcal{N})}}\right)_{\mathrm{E}_{02}^{(\mathcal{N}+1)}=0} = \frac{\mathrm{M}_{14}\mathrm{M}_{31}-\mathrm{M}_{11}\mathrm{M}_{34}}{\mathrm{M}_{11}\mathrm{M}_{33}-\mathrm{M}_{13}\mathrm{M}_{31}}\,, \tag{4.5.10c}$$

$$r_{14}^{(\mathcal{N}+1,\,0)} = \left(\frac{\mathrm{E}_{01}^{(\mathcal{N}+1)}}{\mathrm{E}_{04}^{(\mathcal{N})}}\right)_{\mathrm{E}_{02}^{(\mathcal{N}+1)}=0} = \frac{\mathrm{M}_{13}\mathrm{M}_{34}-\mathrm{M}_{14}\mathrm{M}_{33}}{\mathrm{M}_{11}\mathrm{M}_{33}-\mathrm{M}_{13}\mathrm{M}_{31}}\,, \tag{4.5.10d}$$

$$t_{22}^{(\mathcal{N}+1,\,0)} = \left(\frac{\mathrm{E}_{02}^{(0)}}{\mathrm{E}_{02}^{(\mathcal{N}+1)}}\right)_{\mathrm{E}_{04}^{(\mathcal{N}+1)}=0}$$

$$= \mathrm{M}_{22} + \frac{\mathrm{M}_{21}\left(\mathrm{M}_{13}\mathrm{M}_{32}-\mathrm{M}_{12}\mathrm{M}_{33}\right)+\mathrm{M}_{23}\left(\mathrm{M}_{12}\mathrm{M}_{31}-\mathrm{M}_{11}\mathrm{M}_{32}\right)}{\mathrm{M}_{11}\mathrm{M}_{33}-\mathrm{M}_{13}\mathrm{M}_{31}}\,, \tag{4.5.10e}$$

$$t_{42}^{(\mathcal{N}+1,\,0)} = \left(\frac{\mathrm{E}_{04}^{(0)}}{\mathrm{E}_{02}^{(\mathcal{N})}}\right)_{\mathrm{E}_{04}^{(\mathcal{N}+1)}=0}$$

$$= \mathrm{M}_{42} + \frac{\mathrm{M}_{41}\left(\mathrm{M}_{13}\mathrm{M}_{32}-\mathrm{M}_{12}\mathrm{M}_{33}\right)+\mathrm{M}_{43}\left(\mathrm{M}_{12}\mathrm{M}_{31}-\mathrm{M}_{11}\mathrm{M}_{32}\right)}{\mathrm{M}_{11}\mathrm{M}_{33}-\mathrm{M}_{13}\mathrm{M}_{31}}\,, \tag{4.5.10f}$$

$$t_{44}^{(\mathcal{N}+1,\,0)} = \left(\frac{\mathrm{E}_{04}^{(0)}}{\mathrm{E}_{04}^{(\mathcal{N})}}\right)_{\mathrm{E}_{02}^{(\mathcal{N}+1)}=0}$$

$$= \mathrm{M}_{44} + \frac{\mathrm{M}_{41}\left(\mathrm{M}_{13}\mathrm{M}_{34}-\mathrm{M}_{14}\mathrm{M}_{33}\right)+\mathrm{M}_{43}\left(\mathrm{M}_{14}\mathrm{M}_{31}-\mathrm{M}_{11}\mathrm{M}_{34}\right)}{\mathrm{M}_{11}\mathrm{M}_{33}-\mathrm{M}_{13}\mathrm{M}_{31}}\,, \tag{4.5.10g}$$

$$t_{24}^{(\mathcal{N}+1,\,0)} = \left(\frac{\mathrm{E}_{02}^{(\mathcal{N}+1)}}{\mathrm{E}_{04}^{(\mathcal{N})}}\right)_{\mathrm{E}_{02}^{(\mathcal{N}+1)}=0}$$

$$= \mathrm{M}_{24} + \frac{\mathrm{M}_{21}\left(\mathrm{M}_{13}\mathrm{M}_{34}-\mathrm{M}_{14}\mathrm{M}_{33}\right)+\mathrm{M}_{23}\left(\mathrm{M}_{14}\mathrm{M}_{31}-\mathrm{M}_{11}\mathrm{M}_{34}\right)}{\mathrm{M}_{11}\mathrm{M}_{33}-\mathrm{M}_{13}\mathrm{M}_{31}}\,. \tag{4.5.10h}$$

Zjišťujeme, že platí vztah

$$r_{12}^{(\mathcal{N}+1,\,0)}r_{34}^{(\mathcal{N}+1,\,0)} - r_{14}^{(\mathcal{N}+1,\,0)}r_{32}^{(\mathcal{N}+1,\,0)} = \frac{\mathrm{M}_{12}\mathrm{M}_{34}-\mathrm{M}_{14}\mathrm{M}_{32}}{\mathrm{M}_{11}\mathrm{M}_{33}-\mathrm{M}_{13}\mathrm{M}_{31}}\,. \tag{4.5.11}$$

Reflexní resp. transmisní koeficienty definované rovnicemi (4.5.8) lze uspořádat do tvaru Jonesovy reflexní resp. transmisní matice (2×2). V reprezentaci vlastních polarizačních módů zvolených v izotropních poloprostorech (0) a $(\mathcal{N}+1)$

$$\begin{pmatrix} E_{02}^{(0)} \\ E_{04}^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{21}^{(0,\mathcal{N}+1)} & r_{23}^{(0,\mathcal{N}+1)} \\ r_{41}^{(0,\mathcal{N}+1)} & r_{43}^{(0,\mathcal{N}+1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{01}^{(0)} \\ E_{03}^{(0)} \end{pmatrix} \tag{4.5.12a}$$

$$\begin{pmatrix} E_{01}^{(\mathcal{N}+1)} \\ E_{03}^{(\mathcal{N}+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11}^{(0,\mathcal{N}+1)} & t_{13}^{(0,\mathcal{N}+1)} \\ t_{31}^{(0,\mathcal{N}+1)} & t_{33}^{(0,\mathcal{N}+1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{01}^{(0)} \\ E_{03}^{(0)} \end{pmatrix} \tag{4.5.12b}$$

Nejvhodnější vlastní módy v izotropních neabsorbujících poloprostorech při nenulových úhlech dopadu odpovídají volbě $p^{(s)} = 1$ a $q^{(s)} = 0$ v rovnicích (4.4.7). Jedná se o módy lineárně polarizované kolmo resp. rovnoběžně vůči rovině dopadu. Pak se reflexní a transmisní koeficienty redukují na reflexní a transmisní koeficienty definované Yehem [1]. Poměry reflexních resp. transmisních koeficientů v rovnicích (4.5.8) představují komplexní elipsometrické parametry zobecněné na multivrstvu.

Jmenovatel na pravé straně rovnic (4.5.8) a (4.5.10) , je stejný a je dán výrazem

$$M_{11}M_{33} - M_{13}M_{31}\,.$$

Po případné vhodné normalizaci popisuje vliv mnohanásobných odrazů postupujících módů. Výrazy v čitateli rovnic (4.5.8e)–(4.5.8h) a (4.5.10e)–(4.5.10h) pro transmisní koeficienty pak charakterizují jednoduchý průchod vln napříč multivrstevnatou strukturou. Analogicky výrazy v čitateli rovnic (4.5.8a)–(4.5.8d) a (4.5.10a)–(4.5.10d) pro reflexní koeficienty charakteruzuje dvojí průchod (tam i zpět) napříč strukturou. Analýzu lze rozšířit tak, aby zahrnovala evanescentní vlny. Pro $E_{01}^{(0)} = 0$ a $E_{03}^{(0)} = 0$ rovnice (4.5.3) dává

$$0 = M_{11}E_{01}^{(\mathcal{N}+1)} + M_{13}E_{03}^{(\mathcal{N}+1)} \tag{4.5.13a}$$

$$0 = M_{13}E_{01}^{(\mathcal{N}+1)} + M_{33}E_{03}^{(\mathcal{N}+1)} \tag{4.5.13b}$$

Jak ukázal Yeh, podmínka pro netriviální řešení této soustavy rovnic vyjádřená nulovým determinantem zní

$$M_{11}M_{33} - M_{13}M_{31} = 0\,. \tag{4.5.14}$$

Představuje disperzní vztah pro šíření vedených vln v multivrstevnaté struktuře, tzv. vlnovodovou podmínku. V souladu s okrajovými podmínkami pro vedené vlny pole $E_{01}^{(0)}$, $E_{03}^{(0)}$, $E_{01}^{(\mathcal{N}+1)}$, a $E_{03}^{(\mathcal{N}+1)}$ musí v nekonečnu vymizet a představují tedy evanescentní vlny. Podmínka vyjádřená rovnicí (4.5.14) se využívá při návrhu planárních vlnovodů s anizotropními vrstvami.

4.6 Jednoduché rozhraní

V tomto odstavci uvážíme obecný případ rovinného rozhraní mezi izotropním poloprostorem a poloprostorem s obecnou anizotropií. Matice **M** pro jednoduché rozhraní je dána součinem

$$\mathbf{M} = \left(\mathbf{D}^{(0)}\right)^{-1}\mathbf{D}^{(1)}\,, \tag{4.6.1}$$

kde prvky matic $\left(\mathbf{D}^{(0)}\right)^{-1}$ a $\mathbf{D}^{(1)}$ nalezneme v rovnici (4.4.19) a v rovnicích (4.3.8). Protože předpokládáme, že anizotropní absorbující prostředí vyplňuje celý poloprostor, nemusíme se zabývat procházejícími vlnami ani vlnami postupujícími k rozhraní z anizotropního poloprostoru. Naše úvahy se tedy soustředí jen na vlny v izotropním poloprostoru.

Vektory šíření $\gamma^{(i)}$ resp. $\gamma^{(r)}$ dopadající resp. odražené vlny jsou vázány transformací rotace o úhel $(\pi - 2\varphi_0)$

$$\gamma^{(r)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\left(\pi - 2\varphi^{(0)}\right) & \sin\left(\pi - 2\varphi^{(0)}\right) \\ 0 & -\sin\left(\pi - 2\varphi^{(0)}\right) & \cos\left(\pi - 2\varphi^{(0)}\right) \end{pmatrix} \gamma^{(i)} \tag{4.6.2}$$

nebo užitím podrobnějšího vyjádření

$$\frac{\omega}{c} N^{(0)} \begin{pmatrix} 0 \\ \sin\varphi^{(0)} \\ -\cos\varphi^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\left(\pi - 2\varphi^{(0)}\right) & \sin\left(\pi - 2\varphi^{(0)}\right) \\ 0 & -\sin\left(\pi - 2\varphi^{(0)}\right) & \cos\left(\pi - 2\varphi^{(0)}\right) \end{pmatrix} \times \frac{\omega}{c} N^{(0)} \begin{pmatrix} 0 \\ \sin\varphi^{(0)} \\ \cos\varphi^{(0)} \end{pmatrix} . \tag{4.6.3}$$

Při šikmém dopadu z izotropního poloprostoru se nám jako nejvhodnější volba nabízejí vlastní polarizační módy vlny polarizované kolmo a rovnoběžně vůči rovině dopadu $x = 0$. Získáme je volbou $p^{(0)} = 1$ a $q^{(0)} = 0$. Z rovnic (4.4.18) a (4.4.19) zjistíme, že matice $\mathbf{D}^{(s)}$ a $\left(\mathbf{D}^{(s)}\right)^{-1}$ se zjednoduší na kvazidiagonální s bloky (2×2). Celková matice $\mathbf{M}$ může být takto kvazidiagonální pouze ve speciálních případech anizotropních poloprostorů[7] s případným omezením na orientaci roviny dopadu vůči význačným osám anizotropie[8] Celková matice $\mathbf{M}$ bude ovšem kvazidiagonální, stále při volbě $p^{(0)} = 1$ a $q^{(0)} = 0$, pokud je i druhý poloprostor izotropní. Avšak v obecných případech anizotropních poloprostorů jsou mimodiagonální bloky (2×2) nenulové.

[7]Příkladem je poloprostor s jednoosou anizotropiíí, jejíž hlavní osa je orientována kolmo k rozhraní. Orientace roviny dopadu je přitom libovolná.

[8]Příkladem je poloprostor s orthorhombickou symetrií s jednou orthorhombickou osou kolmou na rozhraní, druhou orthorhombickou osu kolmou na rovinu dopadu a třetí orthorhombickou osou také rovnoběžnou s rozhraním a ležící současně v rovině dopadu.

Elektrická pole dvou párů lineárně polarizovaných vlastních polarizačních módů v izotropním prostředí vyplňujícím poloprostor $z < z^{(0)}$ zapíšeme jako

$$\boldsymbol{E}_1^{(0)} = \mathrm{E}_{01}^{(0)} \hat{\boldsymbol{x}} \exp\left[\mathrm{j}\omega t - \mathrm{j}N^{(0)} \frac{\omega}{c} \left(y \sin\varphi^{(0)} + z\cos\varphi^{(0)}\right)\right] , \tag{4.6.4a}$$

$$\boldsymbol{E}_2^{(0)} = \mathrm{E}_{02}^{(0)} \hat{\boldsymbol{x}} \exp\left[\mathrm{j}\omega t - \mathrm{j}N^{(0)} \frac{\omega}{c} \left(y \sin\varphi^{(0)} - z\cos\varphi^{(0)}\right)\right] , \tag{4.6.4b}$$

$$\boldsymbol{E}_3^{(0)} = \mathrm{E}_{03}^{(0)} \left(\cos\varphi^{(0)} \hat{\boldsymbol{y}} - \sin\varphi^{(0)} \hat{\boldsymbol{z}}\right) \exp\left[\mathrm{j}\omega t - \mathrm{j}N^{(0)} \frac{\omega}{c} \left(y \sin\varphi^{(0)} + z\cos\varphi^{(0)}\right)\right] , \tag{4.6.4c}$$

$$\boldsymbol{E}_4^{(0)} = \mathrm{E}_{04}^{(0)} \left(\cos\varphi^{(0)} \hat{\boldsymbol{y}} + \sin\varphi^{(0)} \hat{\boldsymbol{z}}\right) \exp\left[\mathrm{j}\omega t - \mathrm{j}N^{(0)} \frac{\omega}{c} \left(y \sin\varphi^{(0)} - z\cos\varphi^{(0)}\right)\right] , \tag{4.6.4d}$$

kde úhel dopadu byl označen symbolem $\varphi^{(0)}$. Odpovídající magnetická pole získáme z Maxwellovy rovnice vyjadřující Faradayův indukční zákon $\nabla \times \boldsymbol{E} = -\left(\partial \boldsymbol{B}/\partial t\right)$

$$\begin{aligned} c\boldsymbol{B}_1^{(0)} &= N^{(0)} \mathrm{E}_{01}^{(0)} \left(\cos\varphi^{(0)} \hat{\boldsymbol{y}} - \sin\varphi^{(0)} \hat{\boldsymbol{z}}\right) \\ &\times \exp\left[\mathrm{j}\omega t - \mathrm{j}N^{(0)} \frac{\omega}{c} \left(y \sin\varphi^{(0)} + z\cos\varphi^{(0)}\right)\right] , \end{aligned} \tag{4.6.5a}$$

$$\begin{aligned} c\boldsymbol{B}_2^{(0)} &= N^{(0)} \mathrm{E}_{02}^{(0)} \left(-\cos\varphi^{(0)} \hat{\boldsymbol{y}} - \sin\varphi^{(0)} \hat{\boldsymbol{z}}\right) \\ &\times \exp\left[\mathrm{j}\omega t - \mathrm{j}N^{(0)} \frac{\omega}{c} \left(y \sin\varphi^{(0)} - z\cos\varphi^{(0)}\right)\right] , \end{aligned} \tag{4.6.5b}$$

$$c\boldsymbol{B}_3^{(0)} = N^{(0)} \mathrm{E}_{03}^{(0)} \left(-\hat{\boldsymbol{x}}\right) \exp\left[\mathrm{j}\omega t - \mathrm{j}N^{(0)} \frac{\omega}{c} \left(y \sin\varphi^{(0)} + z\cos\varphi^{(0)}\right)\right] , \tag{4.6.5c}$$

$$c\boldsymbol{B}_4^{(0)} = N^{(0)} \mathrm{E}_{04}^{(0)} \hat{\boldsymbol{x}} \exp\left[\mathrm{j}\omega t - \mathrm{j}N^{(0)} \frac{\omega}{c} \left(y \sin\varphi^{(0)} - z\cos\varphi^{(0)}\right)\right] . \tag{4.6.5d}$$

Tím jsme získali informaci, kterou použijeme při výpočtu skalárních součinů polí čtyř vlastních polarizačních módů se dvěma kartézskými jednotkovými vektory rovnoběžnými s rozhraním vystupujícími v dynamické matici definované rovnicí (4.3.7). Můžeme postupovat i jinak. Použijeme rovnice (4.4.18) a (4.4.19) pro $\mathbf{D}^{(s)}$ a $\left(\mathbf{D}^{(s)}\right)^{-1}$ a dosadíme $p^{(s)} = 1$ a $q^{(s)} = 0$. Dostaneme

$$\mathbf{D}^{(s)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ N^{(s)}\cos\varphi^{(s)} & -N^{(s)}\cos\varphi^{(s)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\varphi^{(s)} & \cos\varphi^{(s)} \\ 0 & 0 & -N^{(s)} & N^{(s)} \end{pmatrix} , \tag{4.6.6a}$$

$$\left(\mathbf{D}^{(s)}\right)^{-1} = \left(2N^{(s)}\cos\varphi^{(s)}\right)^{-1} \begin{pmatrix} N^{(s)}\cos\varphi^{(s)} & 1 & 0 & 0 \\ N^{(s)}\cos\varphi^{(s)} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N^{(s)} & -\cos\varphi^{(s)} \\ 0 & 0 & N^{(s)} & \cos\varphi^{(s)} \end{pmatrix} . \tag{4.6.6b}$$

V maticovém součinu podle rovnice (4.6.1) použijeme rovnici (4.6.6b) s volbou indexu $s = 0$. Matici $\mathbf{D}^{(1)}$ získáme z obecného tvaru matice $\mathbf{D}^{(n)}$ (s volbou indexu

$n = 1$) vyjádřeného rovnicí (4.3.7), jejíž prvky jsou shrnuty v rovnicích (4.3.8). Pro prvky matice $\mathbf{M}$ vystupující v reflexních charakteristikách odpovídajících dopadu vln na rozhraní z izotropního poloprostoru dostaneme

$$\mathrm{M}_{\substack{11\\21}} = \left[\left(\mathbf{D}^{(0)}\right)^{-1}\mathbf{D}^{(1)}\right]_{\substack{11\\21}} = \frac{1}{2}\left[D_{11}^{(1)} \pm \left(N^{(0)}\cos\varphi^{(0)}\right)^{-1} D_{21}^{(1)}\right], \tag{4.6.7a}$$

$$\mathrm{M}_{\substack{31\\41}} = \left[\left(\mathbf{D}^{(0)}\right)^{-1}\mathbf{D}^{(1)}\right]_{\substack{31\\41}} = \frac{1}{2}\left[\left(\cos\varphi^{(0)}\right)^{-1} D_{31}^{(1)} \mp \left(N^{(0)}\right)^{-1} D_{41}^{(1)}\right], \tag{4.6.7b}$$

$$\mathrm{M}_{\substack{13\\23}} = \left[\left(\mathbf{D}^{(0)}\right)^{-1}\mathbf{D}^{(1)}\right]_{\substack{13\\23}} = \frac{1}{2}\left[D_{13}^{(1)} \pm \left(N^{(0)}\cos\varphi^{(0)}\right)^{-1} D_{23}^{(1)}\right], \tag{4.6.7c}$$

$$\mathrm{M}_{\substack{33\\43}} = \left[\left(\mathbf{D}^{(0)}\right)^{-1}\mathbf{D}^{(1)}\right]_{\substack{33\\43}} = \frac{1}{2}\left[\left(\cos\varphi^{(0)}\right)^{-1} D_{33}^{(1)} \mp \left(N^{(0)}\right)^{-1} D_{43}^{(1)}\right]. \tag{4.6.7d}$$

Již dříve jsme ukázali, že normování vektorů vlastních polarizačních módů $\boldsymbol{e}_j^{(1)}$ v anizotropním poloprostoru není nutné pokud nás zajímají pouze reflexní charakteristiky určené dopadajícími a odraženými vlnami v izotropním poloprostoru.

Definujeme lineárně polarizovanou Jonesovu reflexní matici (2×2) jako vztah mezi dopadajícími a odraženými amplitudami vlastních polarizačních módů lineárně polarizovaných kolmo a rovnoběžně vůči rovině dopadu. Jedná se o speciální případ rovnice (4.5.12a) pro obecnou multivrstvu redukovaný na jednoduché rozhraní

$$\begin{pmatrix} \mathrm{E}_{02}^{(0)} \\ \mathrm{E}_{04}^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{21}^{(01)} & r_{23}^{(01)} \\ r_{41}^{(01)} & r_{43}^{(01)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{E}_{01}^{(0)} \\ \mathrm{E}_{03}^{(0)} \end{pmatrix}. \tag{4.6.8}$$

Zde $\mathrm{E}_{01}^{(0)}$ resp. $\mathrm{E}_{02}^{(0)}$ představují amplitudy komplexních vlastních polarizačních módů dopadajících resp. odražených vln lineárně polarizovaných rovnoběžně s osou x naší soustavy souřadnic, tj. kolmo vůči rovině dopadu. Na druhé straně $\mathrm{E}_{03}^{(0)}$ a $\mathrm{E}_{04}^{(0)}$ označují odpovídající amplitudy komplexních vlastních polarizačních módů lineárně polarizovaných v rovině yz plane, tj. rovnoběžně s rovinou dopadu.

K uvážení fázových relací mezi poli dopadajících a odražených vln a dodržení zvolených znaménkových konvencí je vhodné vyjádřit tyto vztahy ve vektorovém tvaru. Zapíšeme tedy amplitudy elektrických polí odražených vlastních módů jako funkce amplitud elektrických polí vlastních módů dopadajících vztažených k rovině $z = 0$

$$\boldsymbol{E}_2^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\varphi^{(0)} & -\sin 2\varphi^{(0)} \\ 0 & \sin 2\varphi^{(0)} & \cos 2\varphi^{(0)} \end{pmatrix} r_{21}^{(01)} \boldsymbol{E}_1^{(0)}, \tag{4.6.9}$$

pro $\mathrm{E}_{03}^{(0)} = 0$,

$$\boldsymbol{E}_4^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\varphi^{(0)} & -\sin 2\varphi^{(0)} \\ 0 & \sin 2\varphi^{(0)} & \cos 2\varphi^{(0)} \end{pmatrix} r_{43}^{(01)} \boldsymbol{E}_3^{(0)}, \tag{4.6.10}$$

pro $\mathrm{E}_{01}^{(0)} = 0$. Následující dva vztahy vyjadřují vazbu mezi lineárně polarizovanými vlastními módy.

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_4^{(0)} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\varphi(0) & \sin 2\varphi^{(0)} \\ 0 & -\sin 2\varphi^{(0)} & \cos 2\varphi^{(0)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi^{(0)} & \sin\varphi^{(0)} \\ 0 & -\sin\varphi^{(0)} & \cos\varphi^{(0)} \end{pmatrix} \\
&\quad \times \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi^{(0)} & -\sin\varphi^{(0)} \\ 0 & \sin\varphi^{(0)} & \cos\varphi^{(0)} \end{pmatrix} r_{41}^{(01)} \boldsymbol{E}_1^{(0)} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi^{(0)} & -\sin\varphi^{(0)} \\ 0 & \sin\varphi^{(0)} & \cos\varphi^{(0)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\qquad \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi^{(0)} & -\sin\varphi^{(0)} \\ 0 & \sin\varphi^{(0)} & \cos\varphi^{(0)} \end{pmatrix} r_{41}^{(01)} \boldsymbol{E}_1^{(0)}
\end{aligned}
\tag{4.6.11}
$$

pro $\mathrm{E}_{03}^{(0)} = 0$. Začali jsme otočením dopadajícího elektrického pole kolem osy rovnoběžné s vektorem šíření dopadající vlny γ_i o kladný úhel $\pi/2$ ze směru $\hat{\boldsymbol{x}}$ do roviny dopadu. V následujícím kroku jsme otočili takto získaný vektor o úhel $2\varphi^{(0)}$ ze směru určeném γ_i do směru vektoru šíření odražené vlny γ_r. Alternativně můžeme použít transformaci, která sestává ze tří kroků. Začneme rotací dopadajícího pole o úhel $\varphi^{(0)}$. Následuje rotace ze směru určeného $\hat{\boldsymbol{x}}$ do směru $\hat{\boldsymbol{y}}$ kolem $\hat{\boldsymbol{z}}$. Ve třetím kroku otočíme získaný vektor kolem $\hat{\boldsymbol{x}}$ opět o úhel $\varphi^{(0)}$, tj. o úhel mezi jednotkovým vektorem $\hat{\boldsymbol{z}}$ a vektorem γ_r. Takto jsme transformovali pole $\boldsymbol{E}_3^{(0)}$ ležící v rovině dopadu na pole $\boldsymbol{E}_2^{(0)}$, s orientaci ve směru kladného $\hat{\boldsymbol{x}}$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_2^{(0)} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi^{(0)} & -\sin\varphi^{(0)} \\ 0 & \sin\varphi^{(0)} & \cos\varphi^{(0)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\qquad \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi^{(0)} & -\sin\varphi^{(0)} \\ 0 & \sin\varphi^{(0)} & \cos\varphi^{(0)} \end{pmatrix} r_{23}^{(0)} \boldsymbol{E}_3^{(0)} ,
\end{aligned}
\tag{4.6.12}
$$

pro $\mathrm{E}_{01}^{(0)} = 0$. Zjišťujeme, že při kolmém dopadu, kdy $\varphi^{(0)} = 0$, se dopadající elektrická pole transformují na elektrická pole odražená podle následujících pravidel

$$ r_{21}^{(01)} \hat{\boldsymbol{x}} E_{01}^{(0)} \rightarrow \hat{\boldsymbol{x}} E_{02}^{(0)} , \tag{4.6.13a} $$
$$ r_{43}^{(01)} \hat{\boldsymbol{y}} E_{03}^{(0)} \rightarrow \hat{\boldsymbol{y}} E_{04}^{(0)} , \tag{4.6.13b} $$
$$ r_{41}^{(01)} \hat{\boldsymbol{x}} E_{01}^{(0)} \rightarrow \hat{\boldsymbol{y}} E_{04}^{(0)} , \tag{4.6.13c} $$
$$ r_{23}^{(01)} \hat{\boldsymbol{y}} E_{03}^{(0)} \rightarrow \hat{\boldsymbol{x}} E_{02}^{(0)} . \tag{4.6.13d} $$

V klasické elipsometrii izotropních povrchů a vrstev je konvenčně opačné znaménko v rovnici (4.6.13b). Tato konvence plyne přirozeně z transformace duality mezi vektory $\boldsymbol{E}$ (polární vektor) a vektory $\boldsymbol{B}$ (axiální vektor neboli pseudotensor) rovinných vln při odvození Fresnelových rovnic. Tato volba přestává být vhodná, když se jedná o anizotropní povrchy a vrstvy. Tak je tomu speciálně v případě, že vlastní polarizační módy jsou pole kruhově polarizovaná (CP). Zde naše konvence přirozeně popisuje změnu helicity (z pravotočivé na levotočivou a naopak), která nastává při kolmém dopadu: pravotočivá vlna (RCP – right circularly polarized) se odráží jako levotočivá (LCP – left circularly polarized) a levotočivá vlna se odráží jako pravotočivá.

Magnetická pole dopadajících a odražených vlastních polarizačních módů vztažených k rovině $z = 0$ se transformují podle vztahů

$$\boldsymbol{B}_2^{(0)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos 2\varphi(0) & \sin 2\varphi^{(0)} \\ 0 & -\sin 2\varphi^{(0)} & -\cos 2\varphi^{(0)} \end{pmatrix} r_{21}^{(01)} \boldsymbol{B}_1^{(0)} \tag{4.6.14}$$

pro $\mathrm{E}_{03}^{(0)} = 0\,$,

$$\boldsymbol{B}_4^{(0)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos 2\varphi(0) & \sin 2\varphi^{(0)} \\ 0 & -\sin 2\varphi^{(0)} & -\cos 2\varphi^{(0)} \end{pmatrix} r_{43}^{(01)} \boldsymbol{B}_3^{(0)} \tag{4.6.15}$$

pro $\mathrm{E}_{01}^{(0)} = 0\,$. Vazbu mezi lineárně polarizovanými módy ve směru $\hat{\boldsymbol{x}}$ a ve směru $\hat{\boldsymbol{y}}$ vyjadřují vztahy

$$\begin{aligned} \boldsymbol{B}_4^{(0)} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\varphi(0) & -\sin 2\varphi^{(0)} \\ 0 & \sin 2\varphi^{(0)} & \cos 2\varphi^{(0)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi^{(0)} & \sin \varphi^{(0)} \\ 0 & -\sin \varphi^{(0)} & \cos \varphi^{(0)} \end{pmatrix} \\ &\quad \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi^{(0)} & -\sin \varphi^{(0)} \\ 0 & \sin \varphi^{(0)} & \cos \varphi^{(0)} \end{pmatrix} r_{41}^{(0)} \boldsymbol{B}_1^{(0)} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi^{(0)} & -\sin \varphi^{(0)} \\ 0 & \sin \varphi^{(0)} & \cos \varphi^{(0)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\quad \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi^{(0)} & -\sin \varphi^{(0)} \\ 0 & \sin \varphi^{(0)} & \cos \varphi^{(0)} \end{pmatrix} r_{41}^{(0)} \boldsymbol{B}_1^{(0)}\,, \end{aligned} \tag{4.6.16}$$

pro $\mathrm{E}_{03}^{(0)} = 0$ a

$$\begin{aligned} \boldsymbol{B}_2^{(0)} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi^{(0)} & -\sin \varphi^{(0)} \\ 0 & \sin \varphi^{(0)} & \cos \varphi^{(0)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\quad \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi^{(0)} & -\sin \varphi^{(0)} \\ 0 & \sin \varphi^{(0)} & \cos \varphi^{(0)} \end{pmatrix} r_{23}^{(0)} \boldsymbol{B}_3^{(0)} \end{aligned} \tag{4.6.17}$$

pro $\mathrm{E}_{01}^{(0)} = 0\,$.

Zjišťujeme, že při kolmém dopadu, kdy $\varphi^{(0)} = 0$, se magnetická pole dopadajících vln transformují na odpovídající pole vln odražených podle následujících pravidel, která jsou v souladu s rovnicemi (4.6.13)

$$
\begin{aligned}
r_{21}^{(01)} \hat{\boldsymbol{y}} B_{01}^{(0)} &\rightarrow -\hat{\boldsymbol{y}} B_{02}^{(0)}, && (4.6.18a)\\
-r_{43}^{(01)} \hat{\boldsymbol{x}} B_{03}^{(0)} &\rightarrow \hat{\boldsymbol{x}} B_{04}^{(0)}, && (4.6.18b)\\
r_{41}^{(01)} \hat{\boldsymbol{y}} B_{01}^{(0)} &\rightarrow \hat{\boldsymbol{x}} B_{04}^{(0)}, && (4.6.18c)\\
-r_{23}^{(01)} \hat{\boldsymbol{x}} B_{03}^{(0)} &\rightarrow -\hat{\boldsymbol{y}} B_{02}^{(0)}. && (4.6.18d)
\end{aligned}
$$

Vztah mezi amplitudami kartézských složek x a y vektorových polí lineárně polarizovaných kolmo a rovnoběžně vůči rovině může být zapsán maticově

$$
\begin{pmatrix} \mathrm{E}_{02x}^{(0)} \\ \mathrm{E}_{04y}^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{21}^{(01)} & r_{23}^{(01)} \cos^{-1}\varphi^{(0)} \\ r_{41}^{(01)} \cos\varphi^{(0)} & r_{43}^{(01)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{E}_{01x}^{(0)} \\ \mathrm{E}_{03y}^{(0)} \end{pmatrix}, \tag{4.6.19}
$$

kde $\mathrm{E}_{01x}^{(0)} = \mathrm{E}_{01}^{(0)}$, $\mathrm{E}_{02x}^{(0)} = \mathrm{E}_{02}^{(0)}$, $\mathrm{E}_{03y}^{(0)} = \mathrm{E}_{03}^{(0)} \cos\varphi^{(0)}$, a $\mathrm{E}_{04y}^{(0)} = \mathrm{E}_{04}^{(0)} \cos\varphi^{(0)}$.

Dosazením maticových prvků z rovnice (4.6.7) do rovnic (4.5.8a)–(4.5.8d) získáme reflexní koeficienty na rozhraní mezi izotropním poloprostorem a poloprostorem charakterizovaným obecným tenzorem permitivity definovaným rovnicí (4.2.1). Pro vlnu v izotropním poloprostoru dopadající na rozhraní s polarizací elektrického pole kolmo vůči rovině dopadu, tj. s polarizovanou vlnu (z němčiny *senkrecht*) dostaneme

$$
r_{21}^{(01)} = r_{ss}^{(01)} = \frac{N^{(0)} \cos^2\varphi^{(0)} \mathcal{P}^{(1)} + N^{(0)2} \cos\varphi^{(0)} \mathcal{Q}^{(1)} - \cos\varphi^{(0)} \mathcal{S}^{(1)} - N^{(0)} \mathcal{T}^{(1)}}{N^{(0)} \cos^2\varphi^{(0)} \mathcal{P}^{(1)} + N^{(0)2} \cos\varphi^{(0)} \mathcal{Q}^{(1)} + \cos\varphi^{(0)} \mathcal{S}^{(1)} + N^{(0)} \mathcal{T}^{(1)}}, \tag{4.6.20a}
$$

$$
r_{41}^{(01)} = r_{ps}^{(01)} = \frac{2N^{(0)} \cos\varphi^{(0)} \left(D_{41}^{(1)} D_{33}^{(1)} - D_{43}^{(1)} D_{31}^{(1)} \right)}{N^{(0)} \cos^2\varphi^{(0)} \mathcal{P}^{(1)} + N^{(0)2} \cos\varphi^{(0)} \mathcal{Q}^{(1)} + \cos\varphi^{(0)} \mathcal{S}^{(1)} + N^{(0)} \mathcal{T}^{(1)}}. \tag{4.6.20b}
$$

Pro vlnu v izotropním poloprostoru dopadající na rozhraní s polarizací elektrického pole rovnoběžně s rovinou dopadu, tj. p polarizovanou vlnu (z němčiny *parallel*) dostaneme

$$
r_{43}^{(01)} = r_{pp}^{(01)} = \frac{-N^{(0)} \cos^2\varphi^{(0)} \mathcal{P}^{(1)} + N^{(0)2} \cos\varphi^{(0)} \mathcal{Q}^{(1)} - \cos\varphi^{(0)} \mathcal{S}^{(1)} + N^{(0)} \mathcal{T}^{(1)}}{N^{(0)} \cos^2\varphi^{(0)} \mathcal{P}^{(1)} + N^{(0)2} \cos\varphi^{(0)} \mathcal{Q}^{(1)} + \cos\varphi^{(0)} \mathcal{S}^{(1)} + N^{(0)} \mathcal{T}^{(1)}}, \tag{4.6.21a}
$$

$$
r_{23}^{(01)} = r_{sp}^{(01)} = \frac{2N^{(0)} \cos\varphi^{(0)} \left(D_{21}^{(1)} D_{13}^{(1)} - D_{11}^{(1)} D_{23}^{(1)} \right)}{N^{(0)} \cos^2\varphi^{(0)} \mathcal{P}^{(1)} + N^{(0)2} \cos\varphi^{(0)} \mathcal{Q}^{(1)} + \cos\varphi^{(0)} \mathcal{S}^{(1)} + N^{(0)} \mathcal{T}^{(1)}}. \tag{4.6.21b}
$$

kde reflexní koeficienty můžeme seřadit do lineárně polarizované Jonesovy reflexní maticeodpovídající definici podle rovnice (4.6.8)

$$
\begin{pmatrix} \mathrm{E}_{0s}^{(0)} \\ \mathrm{E}_{0p}^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{ss}^{(01)} & r_{sp}^{(01)} \\ r_{ps}^{(01)} & r_{pp}^{(01)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{E}_{0s}^{(0)} \\ \mathrm{E}_{0p}^{(0)} \end{pmatrix}. \tag{4.6.22}
$$

Opět připomínáme, že v klasické elipsometrii se používá jiná znaménková konvence [6] , podle níž je kladná orientace elektrických polí dopadajících a odražených vln polarizovaných v rovině dopadu volena tak, že v limitě nulového úhlu dopadu (tj. při kolmém dopadu) jsou zvolené kladné orientace dopadajících a odražených vln navzájem opačné. Při naší volbě jsou kladné orientace p-polarizovaných dopadajících a odražených vln v limitě nulového úhlu dopadu souhlasné. V důsledku této volby budou znaménka maticových prvků zahrnujících odražené p-polarizované vlny, tj. znaménka prvků $r_{ps}^{(01)}$ a $r_{pp}^{(01)}$ u těchto dvou konvencí opačná.

Dostáváme výsledek (až na společný faktor)

$$\mathcal{P}^{(1)} = \left(D_{13}^{(1)} D_{41}^{(1)} - D_{11}^{(1)} D_{43}^{(1)}\right) , \tag{4.6.23a}$$

$$\mathcal{Q}^{(1)} = \left(D_{11}^{(1)} D_{33}^{(1)} - D_{13}^{(1)} D_{31}^{(1)}\right) , \tag{4.6.23b}$$

$$\mathcal{S}^{(1)} = \left(D_{23}^{(1)} D_{41}^{(1)} - D_{21}^{(1)} D_{43}^{(1)}\right) , \tag{4.6.23c}$$

$$\mathcal{T}^{(1)} = \left(D_{21}^{(1)} D_{33}^{(1)} - D_{23}^{(1)} D_{31}^{(1)}\right) . \tag{4.6.23d}$$

Označíme

$$\mathcal{U}^{(1)} = \left(D_{13}^{(1)} D_{21}^{(1)} - D_{11}^{(1)} D_{23}^{(1)}\right) , \tag{4.6.23e}$$

$$\mathcal{W}^{(1)} = \left(D_{41}^{(1)} D_{33}^{(1)} - D_{43}^{(1)} D_{31}^{(1)}\right) . \tag{4.6.23f}$$

Níže uvádíme explicitní vyjádření pro tyto výrazy [8]. Obsahují úplnou informaci o reflexi na rovinném rozhraní mezi izotropním a obecně anizotropním poloprostorem. Mohou být využity při odvození výrazů pro speciální případy. Do rovnice (4.6.23) dosadíme podle rovnice (4.3.8) za prvky matice $\mathbf{D}^{(1)}$. Při výpočtech je užitečné si všimnout, že rozdíl dvou součinů prvků matice $\mathbf{D}^{(1)}$ je antisymetrický vůči záměně $N_{z1}^{(1)} \leftrightarrow N_{z3}^{(1)}$. Až na nepodstatný společný činitel dostáváme

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}^{(1)} = & \Big\{\varepsilon_{xz}^{(1)}\varepsilon_{zz}^{(1)} N_y \left(N_{z1}^{(1)} N_{z3}^{(1)}\right)\left(N_{z1}^{(1)} + N_{z3}^{(1)}\right) \\
& -\varepsilon_{zz}^{(1)}\left[\varepsilon_{xy}^{(1)}\left(\varepsilon_{zz}^{(1)} - N_y^2\right) - \varepsilon_{xz}^{(1)}\varepsilon_{zy}^{(1)}\right]\left(N_{z1}^{(1)2} + N_{z3}^{(1)2}\right) \\
& -\left[\varepsilon_{zz}^{(1)}\varepsilon_{xy}^{(1)}\left(\varepsilon_{zz}^{(1)} - N_y^2\right) - \varepsilon_{xz}^{(1)}\varepsilon_{zy}^{(1)}\left(\varepsilon_{zz}^{(1)} + N_y^2\right)\right]\left(N_{z1}^{(1)} N_{z3}^{(1)}\right) \\
& -\varepsilon_{zy}^{(1)} N_y\left[\varepsilon_{xy}^{(1)}\left(\varepsilon_{zz}^{(1)} - N_y^2\right) - \varepsilon_{xz}^{(1)}\varepsilon_{zy}^{(1)}\right]\left(N_{z1}^{(1)} + N_{z3}^{(1)}\right) \\
& +\left(\varepsilon_{xy}^{(1)}\varepsilon_{zz}^{(1)} - \varepsilon_{xz}^{(1)}\varepsilon_{zy}^{(1)}\right)\left[\left(\varepsilon_{xx}^{(1)} - N_y^2\right)\left(\varepsilon_{zz}^{(1)} - N_y^2\right) - \varepsilon_{zx}^{(1)}\varepsilon_{xz}^{(1)}\right]\Big\} ,
\end{aligned} \tag{4.6.24a}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}^{(1)} = & \Big\{\varepsilon_{xz}^{(1)} N_y\left(\varepsilon_{zz}^{(1)} - N_y^2\right)\left(N_{z1}^{(1)} N_{z3}^{(1)}\right) \\
& -\left(\varepsilon_{zz}^{(1)} - N_y^2\right)\left[\varepsilon_{xy}^{(1)}\left(\varepsilon_{zz}^{(1)} - N_y^2\right) - \varepsilon_{xz}^{(1)}\varepsilon_{zy}^{(1)}\right]\left(N_{z1}^{(1)} + N_{z3}^{(1)}\right) \\
& +\varepsilon_{xz}^{(1)} N_y\left[\left(\varepsilon_{xx}^{(1)} - N_y^2\right)\left(\varepsilon_{zz}^{(1)} - N_y^2\right) - \varepsilon_{xz}^{(1)}\varepsilon_{zx}^{(1)}\right]\Big\}
\end{aligned} \tag{4.6.24b}$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S}^{(1)} \;=\;& \Big\{\varepsilon_{xz}^{(1)}\varepsilon_{zz}^{(1)}N_y\left(N_{z1}^{(1)}N_{z3}^{(1)}\right)^2 \\
&-\varepsilon_{zz}^{(1)}\left[\varepsilon_{xy}^{(1)}\left(\varepsilon_{zz}^{(1)}-N_y^2\right)-\varepsilon_{xz}^{(1)}\varepsilon_{zy}^{(1)}\right]\left(N_{z1}^{(1)}N_{z3}^{(1)}\right)\left(N_{z1}^{(1)}+N_{z3}^{(1)}\right) \\
&+\varepsilon_{xz}^{(1)}N_y\left[\varepsilon_{zz}^{(1)}\left(\varepsilon_{xx}^{(1)}-N_y^2\right)-\varepsilon_{xz}^{(1)}\varepsilon_{zx}^{(1)}\right]\left(N_{z1}^{(1)}N_{z3}^{(1)}\right) \\
&-\varepsilon_{zy}^{(1)}N_y\left[\varepsilon_{xy}^{(1)}\left(\varepsilon_{zz}^{(1)}-N_y^2\right)-\varepsilon_{xz}^{(1)}\varepsilon_{zy}^{(1)}\right]\left(N_{z1}^{(1)}N_{z3}^{(1)}\right) \\
&+\varepsilon_{xz}^{(1)}N_y^2\left[\varepsilon_{zy}^{(1)}\left(\varepsilon_{xx}^{(1)}-N_y^2\right)-\varepsilon_{xy}^{(1)}\varepsilon_{zx}^{(1)}\right]\left(N_{z1}^{(1)}+N_{z3}^{(1)}\right) \\
&-N_y\left[\varepsilon_{xy}^{(1)}\left(\varepsilon_{zz}^{(1)}-N_y^2\right)-\varepsilon_{xz}^{(1)}\varepsilon_{zy}^{(1)}\right]\left[\varepsilon_{zy}^{(1)}\left(\varepsilon_{xx}^{(1)}-N_y^2\right)-\varepsilon_{xy}^{(1)}\varepsilon_{zx}^{(1)}\right]\Big\}\,, \qquad (4.6.24c)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{T}^{(1)} \;=\;& \Big\{-\left(\varepsilon_{zz}^{(1)}-N_y^2\right)\left[\varepsilon_{xy}^{(1)}\left(\varepsilon_{zz}^{(1)}-N_y^2\right)-\varepsilon_{xz}^{(1)}\varepsilon_{zy}^{(1)}\right]\left(N_{z1}^{(1)}N_{z3}^{(1)}\right) \\
&+\varepsilon_{xz}^{(1)}N_y\left[\left(\varepsilon_{xx}^{(1)}-N_y^2\right)\left(\varepsilon_{zz}^{(1)}-N_y^2\right)-\varepsilon_{xz}^{(1)}\varepsilon_{zx}^{(1)}\right]\left(N_{z1}^{(1)}+N_{z3}^{(1)}\right) \\
&-\left[\varepsilon_{xy}^{(1)}\left(\varepsilon_{zz}^{(1)}-N_y^2\right)-\varepsilon_{xz}^{(1)}\varepsilon_{zy}^{(1)}\right]\left[\left(\varepsilon_{xx}^{(1)}-N_y^2\right)\left(\varepsilon_{zz}^{(1)}-N_y^2\right)-\varepsilon_{xz}^{(1)}\varepsilon_{zx}^{(1)}\right]\Big\}\,, \qquad (4.6.24d)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{U}^{(1)} \;=\;& \varepsilon_{xz}^2N_y^2\left(N_{z1}^{(1)}N_{z3}^{(1)}\right)-\varepsilon_{xz}^{(1)}N_y\left[\varepsilon_{xy}^{(1)}\left(\varepsilon_{zz}^{(1)}-N_y^2\right)-\varepsilon_{xz}^{(1)}\varepsilon_{zy}^{(1)}\right]\left(N_{z1}^{(1)}+N_{z3}^{(1)}\right) \\
&+\left[\varepsilon_{xy}\left(\varepsilon_{zz}-N_y^2\right)-\varepsilon_{xz}\varepsilon_{zy}\right]^2\,, \qquad (4.6.25)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{W}^{(1)} \;=\;& -\varepsilon_{zz}^{(1)}\left(\varepsilon_{zz}^{(1)}-N_y^2\right)\left(N_{z1}^{(1)}N_{z3}^{(1)}\right)^2 \\
&+\varepsilon_{zz}^{(1)}\left[\left(\varepsilon_{xx}^{(1)}-N_y^2\right)\left(\varepsilon_{zz}-N_y^2\right)-\varepsilon_{xz}^{(1)}\varepsilon_{zx}^{(1)}\right]\left(N_{z1}^{(1)2}+N_{z3}^{(1)2}\right) \\
&-\varepsilon_{xz}^{(1)}\varepsilon_{zx}^{(1)}N_y^2\left(N_{z1}^{(1)}N_{z3}^{(1)}\right) \\
&-\varepsilon_{zx}^{(1)}N_y\left[\varepsilon_{xy}^{(1)}\left(\varepsilon_{zz}-N_y^2\right)-\varepsilon_{xz}^{(1)}\varepsilon_{zy}^{(1)}\right]\left(N_{z1}^{(1)}+N_{z3}^{(1)}\right) \\
&-\left[\left(\varepsilon_{zz}^{(1)}-N_y^2\right)\left(\varepsilon_{xx}^{(1)}-N_y^2\right)-\varepsilon_{xz}^{(1)}\varepsilon_{zx}^{(1)}\right]\left[\varepsilon_{zz}^{(1)}\left(\varepsilon_{xx}^{(1)}-N_y^2\right)-\varepsilon_{xz}^{(1)}\varepsilon_{zx}^{(1)}\right]\,. \\
&\qquad (4.6.26)
\end{aligned}
$$

U složitějších struktur vystupují právě získané prvky matice **M** pro jednoduché rozhraní jako součást obecnějších výrazů. Kromě dosud získaných prvků matice **M** se uplatní i zbývající, které jsou dány výrazy

$$
\mathrm{M}_{\substack{12\\22}} = \left[\left(\mathbf{D}^{(0)}\right)^{-1}\mathbf{D}^{(1)}\right]_{\substack{12\\22}} \;=\; \frac{1}{2}\left[D_{12}^{(1)}\pm\left(N^{(0)}\cos\varphi^{(0)}\right)^{-1}D_{22}^{(1)}\right]\,, \qquad (4.6.27a)
$$

$$
\mathrm{M}_{\substack{32\\42}} = \left[\left(\mathbf{D}^{(0)}\right)^{-1}\mathbf{D}^{(1)}\right]_{\substack{32\\42}} \;=\; \frac{1}{2}\left[\left(\cos\varphi^{(0)}\right)^{-1}D_{32}^{(1)}\mp\left(N^{(0)}\right)^{-1}D_{42}^{(1)}\right]\,, \qquad (4.6.27b)
$$

$$\mathrm{M}_{\substack{14\\24}} = \left[\left(\mathbf{D}^{(0)}\right)^{-1}\mathbf{D}^{(1)}\right]_{\substack{14\\24}} = \frac{1}{2}\left[D_{14}^{(1)} \pm \left(N^{(0)}\cos\varphi^{(0)}\right)^{-1} D_{24}^{(1)}\right], \qquad (4.6.27c)$$

$$\mathrm{M}_{\substack{34\\44}} = \left[\left(\mathbf{D}^{(0)}\right)^{-1}\mathbf{D}^{(1)}\right]_{\substack{34\\44}} = \frac{1}{2}\left[\left(\cos\varphi^{(0)}\right)^{-1} D_{34}^{(1)} \mp \left(N^{(0)}\right)^{-1} D_{44}\right] \qquad (4.6.27d)$$

V tomto odstavci jsme ukázali užití Yehova formalizmu pro speciální případ (rovinného) rozhraní mezi izotropním poloprostorem a poloprostorem anizotropním charakterizovaným obecným tensorem permitivity. Užitečnost formalizmu narůstá se složitostí problému. S výjimkou nejjednodušších struktur jsou explicitní výrazy pro reflexní a transmisní charakteristiky anizotropních multivrstev neúnosně složité a problémy jsou prakticky zpracovatelné pouze počítačem. Je nicméně užitečné seznámit se s explicitními výpočty alespoň matic přenosu pro vybrané anizotropní sturktury ve význačných orientacích os anizotropie. Touto cestou se můžeme také dopracovat k jednodušším přibližným výrazům.

Literatura ke kapitole 4

[1] P. Yeh, “Optics of anisotropic layered media: a new 4 × 4 matrix algebra,” Surf. Sci. **96**, 41–53, 1980; Pochi Yeh, *Optical Waves in Layered Media* (John Wiley & Sons, New York 1988) Chapter 9

[2] Š. Višňovský, *Optics in magnetic multilayers and nanostructures*, Taylor and Francis 2006

[3] Š. Višňovský, “Magnetooptical ellipsometry,” Czech. J. Phys. B **36**, 625–650, 1986

[4] Š. Višňovský, “Optics of magnetic multilayers,” Czech. J. Phys. **41**, 663–694, 1991

[5] M. Mansuripur, *The Physical Principles of Magneto-optical Recording*, (Cambridge University Press, London, 1996)

[6] R. M. A. Azzam, N. M. Bashara, *Ellipsometry and Polarized Light* (Elsevier, Amsterdam, 1987)

[7] W. Xu, L. T. Wood, and T. D. Godling, “Optical degeneracies in anisotropic layered media: Treatment of singularities in 4 × 4 matrix formalism,” Phys. Rev. B **61**, 1740–1743, 2000

[8] Š. Višňovský, “Magnetooptical longitudinal and transverse Kerr and birefringence effect in orthorhombic crystals,” Czech. J. Phys. B **34**, 969–980, 1984