Kapitola 3

Abelèsova teorie izotropních vrstev

Předmět šíření elektromagnetických vln v dielektrických i kovových vrstevnatých strukturách je v literatuře rozsáhle zpracován. Zde podáme přehled originální obecné teorie vypracované F. Abelèsem [1, 2].

3.1 Vlnová rovnice v nehomogenním prostředí

Uvažujme rovinnou v čase harmonickou (monochromatickou) elektromagnetickou vlnu, která se šíří izotropním vrstevnatým prostředím. Ve speciálním případě může být tato vlna postupující k nějakému rovinnému rozhraní dvou izotropních prostředí lineárně polarizovaná s elektrickým vektorem kolmým na rovinu dopadu. Označujeme ji jako *příčně elektrickou*, TE (transverse electric wave). Když je na rovinu dopadu kolmý vektor magnetického pole vlny, hovoříme o vlně *příčně magnetické* TM (transverse magnetic wave). Dvojice vln TE a TM je speciálními případem dvojice navzájem orthogonálních lineárních polarizací, jejich lineární kombinace může vytvořit vlnu s libovolnou obecně eliptickou polarizací. Naopak, libovolnou elipticky polarizovanou rovinnou vlnu můžeme rozložit na složky TE a složky TM. Vlny s polarizací TE a TM se izotropním vrstevnatým prostředím šíří navzájem nezávisle. Okrajové podmínky pro elektromagnetická pole na rovině nespojitosti mezi dvěma izotropními prostředími jsou pro TE a TM vlny také navzájem nezávislé.

Maxwellovy rovnice v lineárním izotropním dielektriku (bez disperse), obecně nehomogenním (bez volných nábojů a bez volných proudů), budou

$$\nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = -\mu(\boldsymbol{r}) \frac{\partial \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}, \tag{3.1.1a}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) = \varepsilon(\boldsymbol{r}) \frac{\partial E(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}, \tag{3.1.1b}$$

$$\nabla \cdot [\varepsilon(\boldsymbol{r}) \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)] = 0, \tag{3.1.1c}$$

$$\nabla \cdot [\mu(\boldsymbol{r}) \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)] = 0. \tag{3.1.1d}$$

Maxwellovy rovnice pro pole vln v lineárním izotropním prostředí (3.1.1) zůstávají invariantní vůči současné záměně $\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{H} \to -\boldsymbol{E}$ a $\varepsilon \leftrightarrow \mu$. Tato transformace se označuje jako *transformace dualitní*. Zde $\boldsymbol{E}$, resp. $\boldsymbol{H}$ označují komplexní vektory elektrického, resp. magnetického pole vlny. Díky tomu libovolný teorém pro TM vlny získáme touto transformací z odpovídajícího teorému pro vlny TE. Proto často postačí, když se zaměříme jen na jeden případ, např. na případ TE vln a TM případ získáme z dualitní transformace. Elektrickou permitivitu $\varepsilon(\boldsymbol{r})$ resp. magnetickou permeabilitu $\mu(\boldsymbol{r})$ můžeme vyjádřit jako součin relativní permitivity $\kappa_e(\boldsymbol{r})$ a permitivity vakua ε_0 , resp. relativní magnetické permeability $\kappa_m(\boldsymbol{r})$ a magnetické permeability vakua μ_0

$$\begin{aligned} \varepsilon(\boldsymbol{r}) &= \kappa_e(\boldsymbol{r})\,\varepsilon_0 , && (3.1.2a)\\ \mu(\boldsymbol{r}) &= \kappa_m(\boldsymbol{r})\,\mu_0 . && (3.1.2b) \end{aligned}$$

Přijímáme model, v němž je lineární, izotropní, elektricky neutrálního prostředí, jehož vlastnosti se s časem nemění, nahrazeno prostorovým rozdělením elektrických a magnetických dipólů

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P}(\boldsymbol{r},t) &= \varepsilon_0\left[\kappa_e(\boldsymbol{r})-1\right]\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \chi_e(\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) , && (3.1.3a)\\ \boldsymbol{M}(\boldsymbol{r},t) &= \left[\kappa_m(\boldsymbol{r})-1\right]\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) = \chi_m(\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) . && (3.1.3b) \end{aligned}$$

Zde $\kappa_e(\boldsymbol{r})$ značí prostorově závislou relativní elektrickou permitivitu a $\kappa_m(\boldsymbol{r})$ značí prostorově závislou relativní magnetickou permeabilitu, $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r},t)$ je vektor hustoty elektrických dipólů a $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r},t)$ je vektor hustoty magnetických dipólů, $\chi_e(\boldsymbol{r})$, resp. $\chi_m(\boldsymbol{r})$ značí prostorově závislou elektrickou, resp. magnetickou susceptibilitu.

Vyloučíme $\boldsymbol{H}$ z rovnic (3.1.1a) a (3.1.1b),

$$\begin{aligned} \mu^{-1}(\nabla\times\boldsymbol{E}) &= -\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \Big/ \nabla\times \\ \nabla\times\left[\mu^{-1}(\nabla\times\boldsymbol{E})\right] &= -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\boldsymbol{H}) = -\varepsilon\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{E} \Big/ \cdot\mu \end{aligned} \qquad (3.1.4)$$

abychom dospěli k vlnové rovnici

$$\mu\nabla\times\left[\mu^{-1}(\nabla\times\boldsymbol{E})\right] + \varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{E} = 0 ,$$

nebo též

$$\mu\left(\nabla\mu^{-1}\right)\times(\nabla\times\boldsymbol{E}) + \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{E}) \;-\; \nabla^2\boldsymbol{E} + \varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{E} = 0 . \qquad (3.1.5)$$

Zde

$$\mu\left(\nabla\mu^{-1}\right) = -\frac{\nabla\mu}{\mu} = -\nabla(\ln\mu) . \qquad (3.1.6)$$

Z rovnice (3.1.1c), $\nabla\cdot(\varepsilon \boldsymbol{E}) = 0$, v nehomogenním prostředí obecně neplyne $\nabla\cdot\boldsymbol{E} = 0$. Dostáváme

$$\begin{aligned} \nabla\cdot[\varepsilon(\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{E}] &= 0 \\ \nabla\varepsilon\cdot\boldsymbol{E} + \varepsilon(\nabla\cdot\boldsymbol{E}) &= 0 \\ \nabla\cdot\boldsymbol{E} &= -[\nabla(\ln\varepsilon)]\cdot\boldsymbol{E}\,. \end{aligned} \tag{3.1.7}$$

Vyloučíme podle rovnice (3.1.7) výraz $\nabla\cdot\boldsymbol{E}$ z vlnové rovnice (3.1.5) a použijeme

$$\varepsilon\left(\nabla\varepsilon^{-1}\right) = -\frac{\nabla\varepsilon}{\varepsilon} = -\nabla(\ln\varepsilon)\;. \tag{3.1.8}$$

Dostaneme

$$\nabla^2\boldsymbol{E} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{E} + [\nabla(\ln\mu)]\times(\nabla\times\boldsymbol{E}) + \nabla[\boldsymbol{E}\cdot\nabla(\ln\varepsilon)] \;=\; 0\,. \tag{3.1.9}$$

To je vlnová rovnice pro vektor elektrického pole v izotropním nehomogenním prostředí.

Dualitou $\boldsymbol{H}\to\mp\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{E}\to\pm\boldsymbol{H}$, $\mu\leftrightarrow\varepsilon$ se dostaneme k vlnové rovnici pro $\boldsymbol{H}$

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-1}(\nabla\times\boldsymbol{H}) &= \frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\Big/\,\nabla\times \\ \nabla\times\left[\varepsilon^{-1}(\nabla\times\boldsymbol{H})\right] &= \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\boldsymbol{E}) = -\mu\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{H}\Big/\cdot\varepsilon \end{aligned} \tag{3.1.10}$$

Odtud po vynásobení ε

$$\varepsilon\nabla\times\left[\varepsilon^{-1}(\nabla\times\boldsymbol{H})\right] + \mu\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{H} = 0\,,$$

nebo též

$$\varepsilon\left(\nabla\varepsilon^{-1}\right)\times(\nabla\times\boldsymbol{H}) + \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{H}) \;-\; \nabla^2\boldsymbol{H} + \mu\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{H} = 0\,. \tag{3.1.11}$$

Zde

$$\varepsilon\left(\nabla\varepsilon^{-1}\right) = -\frac{\nabla\varepsilon}{\varepsilon} = -\nabla(\ln\varepsilon)\;. \tag{3.1.12}$$

Z rovnice (3.1.1d), $\nabla\cdot(\mu\boldsymbol{H}) = 0$, v nehomogenním prostředí obecně neplyne $\nabla\cdot\boldsymbol{H} = 0$. Dostáváme

$$\begin{aligned} \nabla\cdot[\mu(\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{H}] &= 0 \\ \nabla\mu\cdot\boldsymbol{H} + \mu(\nabla\cdot\boldsymbol{H}) &= 0 \\ \nabla\cdot\boldsymbol{H} &= -[\nabla(\ln\mu)]\cdot\boldsymbol{H}\,. \end{aligned} \tag{3.1.13}$$

Vyloučíme podle rovnice (3.1.13) výraz $\nabla\cdot\boldsymbol{H}$ z vlnové rovnice (3.1.11) a použijeme

$$\mu\left(\nabla\mu^{-1}\right) = -\frac{\nabla\mu}{\mu} = -\nabla(\ln\mu)\;. \tag{3.1.14}$$

dostaneme

$$\nabla^2\boldsymbol{H} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{H} + [\nabla(\ln\varepsilon)]\times(\nabla\times\boldsymbol{H}) + \nabla[\boldsymbol{H}\cdot\nabla(\ln\mu)] \;=\; 0\,. \tag{3.1.15}$$

To je konečný tvar vlnové rovnice pro vektor magnetického pole v izotropním nehomogenním prostředí.

3.2 Vlnová rovnice ve vrstevnatém prostředí

Vrstevnaté prostředí představuje nejjednodušší případ prostředí nehomogenního. Materiálové charakteristiky se mění pouze ve směru jediné osy, *osy vrstevnatého prostředí*, kterou jsme položili do osy z naší kartézské soustavy souřadnic. Rovinu dopadu, v níž leží vektor šíření vlny, zvolíme kolmou na $\hat{\boldsymbol{x}}$, tj. v rovině yz. Rovnice odst. 3.1 lze pak zjednodušit. Klademe tedy $\varepsilon(\boldsymbol{r}) = \varepsilon(z)$ a $\mu(\boldsymbol{r}) = \mu(z)$. Vyjdeme z rovnice (3.1.9). Pro TE vlny ($E_x \neq 0$) jsou složky E_y a E_z nulové, $E_y = 0$ a $E_z = 0$. Člen $\nabla[\ln\mu(\boldsymbol{r})] \times (\nabla \times \boldsymbol{E})$ v rovnici (3.1.9) upravíme[1] s uvážením $\mu = \mu(z)$

$$\begin{aligned}
\nabla[\ln\mu(z)] \times (\nabla \times \boldsymbol{E}) &= \frac{1}{\mu}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}z}\hat{\boldsymbol{z}} \times \left[\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\hat{\boldsymbol{x}}\right. \\
&+ \left.\left(\underline{\frac{\partial E_x}{\partial z}} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\hat{\boldsymbol{y}} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\hat{\boldsymbol{z}}\right] \\
&= \frac{1}{\mu}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}z}\hat{\boldsymbol{z}} \times \frac{\partial E_x}{\partial z}\hat{\boldsymbol{y}} \\
&= -\hat{\boldsymbol{x}}\frac{\mathrm{d}(\ln\mu)}{\mathrm{d}z}\,\frac{\partial E_x}{\partial z}\,.
\end{aligned} \tag{3.2.1}$$

Člen $\nabla\{\boldsymbol{E}\cdot\nabla[\ln\varepsilon(\boldsymbol{r})]\}$ v rovnici (3.1.9) upravíme s uvážením $\varepsilon = \varepsilon(z)$, $\nabla(\ln\varepsilon) = \hat{\boldsymbol{z}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(\ln\varepsilon)$, abychom zjistili, že je nulový

$$\nabla[\boldsymbol{E}\cdot\nabla(\ln\varepsilon)] = \nabla\left[\hat{\boldsymbol{x}}E_x\cdot\hat{\boldsymbol{z}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(\ln\varepsilon)\right] = \nabla(0) = 0\,. \tag{3.2.2}$$

Vzhledem k předpokladu elektrické neutrality prostředí vyjádřené rovnicí (3.1.1c), $\nabla\cdot[\varepsilon(\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)] = 0$

$$0 = \nabla\cdot[\varepsilon(z)\,\hat{\boldsymbol{x}}E_x] = \hat{\boldsymbol{x}}\cdot\hat{\boldsymbol{z}}\frac{\mathrm{d}\varepsilon(z)}{\mathrm{d}z}E_x + \varepsilon(z)\,\frac{\partial E_x}{\partial x}\,, \tag{3.2.3}$$

tj.

$$\varepsilon(z)\,\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0\,. \tag{3.2.4}$$

Složka E_x je tedy nezávislá na prostorové souřadnici x, lze ji psát jako funkci zbývajících dvou souřadnic, $E_x(y,z)$.[2]

Pro pole harmonická v čase s úhlovou frekvencí ω je

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = -\omega^2\,. \tag{3.2.5}$$

Vlnovou rovnici (3.1.9) pro TE polarizaci pak můžeme přepsat do tvaru

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + \varepsilon(z)\,\mu(z)\,\omega^2 E_x = \frac{\mathrm{d}[\ln\mu(z)]}{\mathrm{d}z}\frac{\partial E_x}{\partial z}\,. \tag{3.2.6}$$

---

[1] Jediný člen přispívající v TE polarizaci je podtržen.

[2] Rovnice (3.2.4) potvrzuje obecnější okolnost. Ze symetrie konfigurace, v níž je rozhraní kolmé na osu z a rovina dopadu kolmá na osu x plyne, že derivace podle x jsou všechny nulové, $\frac{\partial}{\partial x} = 0$.

Nyní se materiálové charakteristiky $\varepsilon(z)$ a $\mu(z)$ vztahují k frekvenci ω.

Zvolíme harmonickou závislost polí úměrnou $\exp(\mathrm{j}\omega t)$ a zapíšeme Maxwellovy rovnice pro tento případ

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\mathrm{j}\omega\mu(z)\, H_x \tag{3.2.7a}$$
$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\mathrm{j}\omega\mu(z)\, H_y \tag{3.2.7b}$$
$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\mathrm{j}\omega\mu(z)\, H_z \tag{3.2.7c}$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = \mathrm{j}\omega\varepsilon(z)\, E_x \tag{3.2.8a}$$
$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = \mathrm{j}\omega\varepsilon(z)\, E_y \tag{3.2.8b}$$
$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = \mathrm{j}\omega\varepsilon(z)\, E_z \tag{3.2.8c}$$

Vezmeme v úvahu, že u TE vlny je pouze složka E_x vektoru elektrického pole nenulová. Dosadíme do rovnic (3.2.7) a (3.2.8) $E_y = 0$ a $E_z = 0$

$$0 = -\mathrm{j}\omega\mu(z)\, H_x \tag{3.2.9a}$$
$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mathrm{j}\omega\mu(z)\, H_y \tag{3.2.9b}$$
$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = \mathrm{j}\omega\mu(z)\, H_z \tag{3.2.9c}$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = \mathrm{j}\omega\varepsilon(z)\, E_x \tag{3.2.10a}$$
$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = 0 \tag{3.2.10b}$$
$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = 0 \tag{3.2.10c}$$

Podle rovnice (3.2.9a) je $H_x = 0$. Potom podle rovnic (3.2.10b) a (3.2.10c) jsou pole H_y a H_z nezávislá na souřadnici x a můžeme je podobně jako $E_x(y,z)$ vyjádřit jako funkce pouze dvou souřadnic, tj. $H_y(y,z)$ a $H_z(y,z)$.

K řešení rovnice (3.2.6) zkusíme Laplaceův součin

$$E_x(y,z) \quad = \quad \mathcal{Y}(y)\,\mathcal{E}_x(z)\ . \tag{3.2.11}$$

Jeho dosazením dostaneme

$$\mathcal{E}_x \frac{\mathrm{d}^2\mathcal{Y}}{\mathrm{d}y^2} + \mathcal{Y}\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}_x}{\mathrm{d}z^2} + \varepsilon(z)\,\mu(z)\,\omega^2\mathcal{Y}\mathcal{E}_x = \mathcal{Y}\frac{\mathrm{d}\left[\ln\mu(z)\right]}{\mathrm{d}z}\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_x}{\mathrm{d}z}\,, \tag{3.2.12}$$

tj.

$$\frac{1}{\mathcal{Y}}\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{Y}}{\mathrm{d}y^2} = -\frac{1}{\mathcal{E}_x}\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}_x}{\mathrm{d}z^2} - \varepsilon(z)\,\mu(z)\,\omega^2 + \frac{\mathrm{d}\left[\ln\mu(z)\right]}{\mathrm{d}z}\frac{1}{\mathcal{E}_x}\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_x}{\mathrm{d}z}\,, \tag{3.2.13}$$

Člen na levé straně je funkcí pouze y, zatímco členy na straně pravé jsou pouze funkcí z. Rovnice (3.2.13) může být splněna pouze tak, že se obě strany této rovnice rovnají stejné konstantě. Volbou $-K_y^2$ získáme harmonická řešení ve směru osy y

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{Y}}{\mathrm{d}y^2} + K_y^2\mathcal{Y} = 0 \tag{3.2.14a}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}_x}{\mathrm{d}z^2} - \frac{\mathrm{d}\left[\ln\mu(z)\right]}{\mathrm{d}z}\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_x}{\mathrm{d}z} + \left[\varepsilon(z)\,\mu(z)\,\omega^2 - K_y^2\right]\mathcal{E}_x = 0\,. \tag{3.2.14b}$$

Rovnici (3.2.14b) bychom mohli zapsat alternativně jako

$$\mu(z)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\mu^{-1}(z)\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_x}{\mathrm{d}z}\right] + \left[\varepsilon(z)\,\mu(z)\,\omega^2 - K_y^2\right]\mathcal{E}_x = 0 \tag{3.2.15}$$

nebo

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}_x}{\mathrm{d}z^2} - \frac{1}{\mu(z)}\frac{\mathrm{d}\mu(z)}{\mathrm{d}z}\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_x}{\mathrm{d}z} + \left[\varepsilon(z)\,\mu(z)\,\omega^2 - K_y^2\right]\mathcal{E}_x = 0\,. \tag{3.2.16}$$

Vezmeme v úvahu rovnice (3.1.2)

$$\varepsilon(z) = \kappa_e(z)\,\varepsilon_0\,, \tag{3.2.17a}$$

$$\mu(z) = \kappa_m(z)\,\mu_0\,, \tag{3.2.17b}$$

a použijeme definici konstanty šíření ve vakuu

$$k_0 = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_{\mathrm{vac}}}\,, \tag{3.2.18}$$

kde λ_{vac} je vlnová délka monochromatické vlny o frekvenci ω ve vakuu. Bude vhodné položit

$$K_y^2 = k_0^2 N_y^2\,. \tag{3.2.19}$$

Potom

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{Y}}{\mathrm{d}y^2} + k_0^2 N_y^2\mathcal{Y} = 0 \tag{3.2.20a}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}_x}{\mathrm{d}z^2} - \frac{\mathrm{d}(\ln\mu)}{\mathrm{d}z}\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_x}{\mathrm{d}z} + k_0^2\left(\kappa_e\kappa_m - N_y^2\right)\mathcal{E}_x = 0\,. \tag{3.2.20b}$$

Řešení rovnice (3.2.20a) můžeme nyní zapsat ve tvaru[3]

$$\mathcal{Y} = \text{constant}\cdot\exp\left(\mp \mathrm{j}k_0 N_y y\right) \tag{3.2.21}$$

[3] Znaménka $\mp$ rozlišují dvě orientace složky y vektoru šíření ležící v průsečíku rovin rozhraní a dopadu. Hornímu znaménku v rovnici (3.2.21) odpovídá vlna postupující v čase ve směru rostoucí souřadnice y.

a pro celkové elektrické pole $E_z\,(y{,}z)$ s polarizací TE máme

$$E_x\,(y{,}z{,}t) \;=\; \mathcal{E}_x\,(z)\exp\left[\mathrm{j}\,(\omega t \mp k_0 N_y y)\right] . \tag{3.2.22}$$

Zde $\mathcal{E}_x\,(z)$ je komplexní funkcí z. Z rovnic (3.2.9b) a (3.2.9c) je zřejmé, že H_y a H_z lze vyjádřit jako

$$\begin{aligned} H_y\,(y{,}z{,}t) &= \mathcal{H}_y\,(z)\exp\left[\mathrm{j}\,(\omega t \mp k_0 N_y y)\right] & (3.2.23\mathrm{a})\\ H_z\,(y{,}z{,}t) &= \mathcal{H}_z\,(z)\exp\left[\mathrm{j}\,(\omega t \mp k_0 N_y y)\right] , & (3.2.23\mathrm{b}) \end{aligned}$$

kde $\mathcal{H}_y$ a $\mathcal{H}_z$ jsou rovněž komplexní funkce z. Z rovnice (3.2.10a), tj. z rovnice

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \;=\; \mathrm{j}\omega\varepsilon E_x \tag{3.2.24}$$

dostaneme

$$\mp \mathrm{j} k_0 N_y \mathcal{H}_z - \frac{\mathrm{d}\mathcal{H}_y}{\mathrm{d}z} \;=\; \mathrm{j}\omega\varepsilon \mathcal{E}_x \tag{3.2.25}$$

Z rovnice (3.2.9b)

$$\begin{aligned} H_y &= \frac{\mathrm{j}}{\omega\mu}\frac{\partial E_x}{\partial z} \\ &= \frac{\mathrm{j}}{\omega\mu}\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_x}{\mathrm{d}z}\exp\left[\mathrm{j}\,(\omega t \mp k_0 N_y y)\right] & (3.2.26) \end{aligned}$$

Avšak podle rovnice (3.2.23a)

$$H_y \;=\; \mathcal{H}_y \exp\left[\mathrm{j}\,(\omega t \mp k_0 N_y y)\right] , \tag{3.2.27}$$

takže

$$\mathcal{H}_y \;=\; \frac{\mathrm{j}}{\omega\mu}\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_x}{\mathrm{d}z} , \tag{3.2.28}$$

Z rovnice (3.2.9c)

$$H_z \;=\; -\frac{\mathrm{j}}{\omega\mu}\frac{\partial E_x}{\partial y} , \tag{3.2.29}$$

užitím rovnice (3.2.22) zjistíme

$$\begin{aligned} H_z &= \mp\frac{k_0 N_y}{\omega\mu} E_x \\ &= \mp\frac{k_0 N_y}{\omega\mu} \mathcal{E}_x \exp\left[\mathrm{j}\,(\omega t \mp k_0 N_y y)\right] . & (3.2.30) \end{aligned}$$

Porovnáním tohoto výsledku s rovnicí (3.2.23a) zjišťujeme úměru polí $\mathcal{E}_x$ a $\mathcal{H}_z$

$$\mathcal{H}_z \;=\; \mp\frac{k_0 N_y}{\omega\mu}\mathcal{E}_x . \tag{3.2.31}$$

nebo s uvážením $\omega = k_0 (\varepsilon_0\mu_0)^{-1/2}$

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_z &= \mp\frac{k_0 N_y}{k_0 (\varepsilon_0\mu_0)^{-1/2}}\frac{1}{\mu_0\kappa_m}\mathcal{E}_x \\ &= \mp\left(\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}\right)^{1/2}\frac{N_y}{\kappa_m}\mathcal{E}_x\,. \qquad (3.2.32)\end{aligned}$$

Z rovnice (3.2.28)

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_x}{\mathrm{d}z} &= -\mathrm{j}\omega\mu\mathcal{H}_y \\ &= -\mathrm{j}k_0 (\varepsilon_0\mu_0)^{-1/2}\mu_0\kappa_m\mathcal{H}_y \qquad (3.2.33)\end{aligned}$$

konečně dostaneme první z dvojice hledaných rovnic

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_x(z)}{\mathrm{d}z} = -\mathrm{j}k_0\left(\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}\right)^{1/2}\kappa_m(z)\,\mathcal{H}_y(z)\;. \qquad (3.2.34)$$

Uvážíme rovnici (3.2.31) a vyloučíme $\mathcal{H}_z$ z rovnice (3.2.25)

$$\begin{aligned}\mp\mathrm{j}k_0 N_y\mathcal{H}_z - \frac{\mathrm{d}\mathcal{H}_y}{\mathrm{d}z} &= \mathrm{j}\omega\varepsilon\mathcal{E}_x \\ \mathrm{j}k_0 N_y\left(\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}\right)^{1/2}\frac{N_y}{\kappa_m}\mathcal{E}_x - \mathrm{j}k_0(\varepsilon_0\mu_0)^{-1/2}\kappa_e\varepsilon_0\mathcal{E}_x &= \frac{\mathrm{d}\mathcal{H}_y}{\mathrm{d}z}\,. \qquad (3.2.35)\end{aligned}$$

Dostaneme konečně druhou z hledaných rovnic

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{H}_y(z)}{\mathrm{d}z} = -\mathrm{j}k_0\left(\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}\right)^{1/2}\left[\kappa_e(z) - \frac{N_y^2}{\kappa_m(z)}\right]\mathcal{E}_x(z)\;, \qquad (3.2.36)$$

Získali jsme tedy dvojici vázaných obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu pro funkce $\mathcal{E}_x(z)$ a $\mathcal{H}_y(z)$

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_x(z)}{\mathrm{d}z} = -\mathrm{j}k_0\left(\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}\right)^{1/2}\kappa_m(z)\,\mathcal{H}_y(z)\;, \qquad (3.2.37a)$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{H}_y(z)}{\mathrm{d}z} = -\mathrm{j}k_0\left(\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}\right)^{1/2}\left[\kappa_e(z) - \frac{N_y^2}{\kappa_m(z)}\right]\mathcal{E}_x(z)\;. \qquad (3.2.37b)$$

Vyloučíme nejprve $\mathcal{H}_y(z)$ a potom $\mathcal{E}_x(z)$, abychom dospěli ke dvojici obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu obsahujících buď jen $\mathcal{E}_x(z)$, nebo jen $\mathcal{H}_y(z)$. K tomuto cíli derivujeme podle z rovnici (3.2.37a) a uvážíme rovnici (3.2.37b)

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}_x}{\mathrm{d}z^2} &= -\mathrm{j}k_0\left(\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}\right)^{1/2}\kappa_m\frac{\mathrm{d}\mathcal{H}_y}{\mathrm{d}z} - \mathrm{j}k_0\left(\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}\right)^{1/2}\frac{\mathrm{d}\kappa_m}{\mathrm{d}z}\mathcal{H}_y \\ &= -\mathrm{j}k_0\left(\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}\right)^{1/2}\kappa_m\left[-\mathrm{j}k_0\left(\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}\right)^{1/2}\left(\kappa_e - \frac{N_y^2}{\kappa_m}\right)\mathcal{E}_x\right] \\ &\quad -\mathrm{j}k_0\left(\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}\right)^{1/2}\frac{\mathrm{d}\kappa_m}{\mathrm{d}z}\left[\frac{\mathrm{j}}{k_0\kappa_m}\left(\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}\right)^{-1/2}\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_x}{\mathrm{d}z}\right]\,. \qquad (3.2.38)\end{aligned}$$

Odtud dostáváme opět rovnici (3.2.20b)

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}_x(z)}{\mathrm{d}z^2} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\ln\kappa_m(z)\right]\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_x(z)}{\mathrm{d}z} + k_0^2\left[\kappa_e(z)\kappa_m(z) - N_y^2\right]\mathcal{E}_x(z) = 0 \tag{3.2.39}$$

Výsledkem je obyčejná lineární homogenní (bez pravé strany) diferenciální rovnice druhého řádu obsahující pouze $\mathcal{E}_x(z)$. Podobně získáme pomocí rovnic (3.2.37) obyčejnou lineární homogenní (bez pravé strany) diferenciální rovnici druhého řádu pro $\mathcal{H}_y$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{H}_y}{\mathrm{d}z^2} &= -\mathrm{j}k_0\left(\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}\right)^{1/2}\left\{\left(\kappa_e - \frac{N_y^2}{\kappa_m}\right)\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_x}{\mathrm{d}z} + \left[\frac{\mathrm{d}\kappa_e}{\mathrm{d}z} + \left(\frac{N_y}{\kappa_m}\right)^2\frac{\mathrm{d}\kappa_m}{\mathrm{d}z}\right]\mathcal{E}_x\right\}\\ &= -\mathrm{j}k_0\left(\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}\right)^{1/2}\left\{\left(\kappa_e - \frac{N_y^2}{\kappa_m}\right)\left[-\mathrm{j}k_0\left(\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}\right)^{1/2}\kappa_m\mathcal{H}_y\right]\right.\\ &+ \left.\left[\frac{\mathrm{d}\kappa_e}{\mathrm{d}z} + \left(\frac{N_y}{\kappa_m}\right)^2\frac{\mathrm{d}\kappa_m}{\mathrm{d}z}\right]\left[\frac{\mathrm{j}}{k_0}\left(\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}\right)^{1/2}\left(\kappa_e - \frac{N_y^2}{\kappa_m}\right)^{-1}\frac{\mathrm{d}\mathcal{H}_y}{\mathrm{d}z}\right]\right\}\end{aligned} \tag{3.2.40}$$

Dostáváme

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{H}_y(z)}{\mathrm{d}z^2} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left\{\ln\left[\kappa_e(z) - \frac{N_y^2}{\kappa_m(z)}\right]\right\}\frac{\mathrm{d}\mathcal{H}_y(z)}{\mathrm{d}z} + k_0^2\left[\kappa_e(z)\kappa_m(z) - N_y^2\right]\mathcal{H}_y(z) = 0\,. \tag{3.2.41}$$

To je rovnice obsahující pouze $\mathcal{H}_y(z)$. Zapišme obě diferenciální rovnice druhého řadu pro TE případ společně jako konečný výsledek

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}_x(z)}{\mathrm{d}z^2} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\ln\kappa_m(z)\right]\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_x(z)}{\mathrm{d}z} + k_0^2\left[\kappa_e(z)\kappa_m(z) - N_y^2\right]\mathcal{E}_x(z) = 0\,, \tag{3.2.42a}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{H}_y(z)}{\mathrm{d}z^2} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left\{\ln\left[\kappa_e(z) - \frac{N_y^2}{\kappa_m(z)}\right]\right\}\frac{\mathrm{d}\mathcal{H}_y(z)}{\mathrm{d}z} + k_0^2\left[\kappa_e(z)\kappa_m(z) - N_y^2\right]\mathcal{H}_y(z) = 0\,. \tag{3.2.42b}$$

Ve speciálním případě, kdy je magnetická permeabilita κ_m nezávislá na souřadnicích, rovnice (3.2.42a) se zjednoduší na

$$\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2} + k_0^2\kappa_m\kappa_e(z)\right]\mathcal{E}_x(z) = k_0^2N_y^2\mathcal{E}_x(z) \tag{3.2.43}$$

a dostává tvar formálně odpovídající jednorozměrné Schroedingerově rovnici pro vlnovou funkci $\psi(z)$ částice o hmotnosti m a o energii E s potenciálem $V(z)$ nezávislým na čase

$$\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2} - \frac{2m}{\hbar^2}V(z)\right]\psi(z) = -\frac{2m}{\hbar^2}E\psi(z)\,. \tag{3.2.44}$$

Případ TM dostaneme z duality $\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{H} \to -\boldsymbol{E}$, $\varepsilon \leftrightarrow \mu$,

$$\begin{aligned} H_x(y,z) &= \mathcal{H}_x(z)\exp\left[\mathrm{j}\left(\omega t \mp k_0 N_y y\right)\right] && (3.2.45\mathrm{a})\\ E_y(y,z) &= \mathcal{E}_y(z)\exp\left[\mathrm{j}\left(\omega t \mp k_0 N_y y\right)\right] && (3.2.45\mathrm{b})\\ E_z(y,z) &= \mathcal{E}_z(z)\exp\left[\mathrm{j}\left(\omega t \mp k_0 N_y y\right)\right]\,. && (3.2.45\mathrm{c}) \end{aligned}$$

K rovnicím (3.2.37) jsou duální rovnice platné pro polarizaci TM

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\mathcal{H}_x(z)}{\mathrm{d}z} &= \mathrm{j}k_0\left(\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}\right)^{1/2}\kappa_e(z)\,\mathcal{E}_y(z)\,, && (3.2.46\mathrm{a})\\ \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_y(z)}{\mathrm{d}z} &= \mathrm{j}k_0\left(\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}\right)^{1/2}\left[\kappa_m(z)-\frac{N_y^2}{\kappa_e(z)}\right]\mathcal{H}_x(z)\,. && (3.2.46\mathrm{b}) \end{aligned}$$

Konstanta N_y , která charakterizuje šíření elektromagnetické vlny, je v izotropních prostředích nezávislá na polarizaci a nemusíme ji tedy rozlišovat pro TE a TM polarizaci. Funkce $\mathcal{E}_z$ a $\mathcal{H}_x$ jsou vázány vztahem analogickým rovnici (3.2.31)

$$\mathcal{E}_z = \pm\frac{k_0 N_y}{\omega\varepsilon}\mathcal{H}_x\,. \tag{3.2.47}$$

Funkce $\mathcal{H}_x(z)$ a $\mathcal{E}_y(z)$ splňují následující diferenciální rovnice plynoucí dualitou z rovnic (3.2.42)

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{H}_x(z)}{\mathrm{d}z^2}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\ln\kappa_e(z)\right]\frac{\mathrm{d}\mathcal{H}_x(z)}{\mathrm{d}z}+k_0^2\left[\kappa_e(z)\,\kappa_m(z)-N_y^2\right]\mathcal{H}_x(z) = 0 \tag{3.2.48a}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}_y(z)}{\mathrm{d}z^2}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left\{\ln\left[\kappa_m(z)-\frac{N_y^2}{\kappa_e(z)}\right]\right\}\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_y(z)}{\mathrm{d}z}+k_0^2\left[\kappa_e(z)\,\kappa_m(z)-N_y^2\right]\mathcal{E}_y(z) = 0\,. \tag{3.2.48b}$$

Jak očekáváme z analogie s případem TE, funkce $\mathcal{H}_x(z)$, $\mathcal{E}_y(z)$ a $\mathcal{E}_z(z)$ jsou rovněž komplexní funkce z . Složka vektoru šíření kolmá na osu z a ležící v rovině dopadu pro jednu ze dvou možných navzájem antiparalelních orientací je nezávislá na z .

Rovnice (3.2.21) praví, že složka vektoru šíření ve vrstevnatém prostředí kolmá na osu vrstevnatého prostředí je invariant, tj. pro všechna z leží v rovině dopadu, nemění velikost ani znaménko. V naší volbě roviny dopadu a osy vrstevnatého prostředí charakterizovaném obecně komplexními $\kappa_e(z)$ a $\kappa_m(z)$ to znamená, že nezávisle na z zůstává složka vektoru šíření rovnoběžná s $\hat{\boldsymbol{y}}$ konstantní

$$\frac{\omega}{c}N_y = \text{constant}\,. \tag{3.2.49}$$

V prostředích, kde $\kappa_e(z)$ a $\kappa_m(z)$ jsou reálné funkce z , může být úhel θ mezi vektorem šíření a osou vrstevnatého prostředí reálný, takže můžeme psát[4]

[4]Pro jednoduchost ředpokládáme, že nikde ve vrstevnaté struktuře nedochází k překročení kritického úhlu dopadu a k úplnému odrazu.

$$k_0 N_y \;=\; k_0 \left[\kappa_e(z)\,\kappa_m(z)\right]^{1/2} \sin\theta(z)\;. \tag{3.2.50}$$

Pro vrstevnaté prostředí charakterizovaná reálnými $\kappa_e(z)$ a $\kappa_m(z)$ plyne z rovnice (3.2.49) zobecnění Snellova zákona

$$N_y \;=\; \left[\kappa_e(z)\,\kappa_m(z)\right]^{1/2} \sin\theta(z) = \text{constant}\,. \tag{3.2.51}$$

3.3 Charakteristická matice vrstevnatého prostředí

Řešení diferenciálních rovnic, která jsme právě odvodili, specifikovaná vhodnými okrajovými podmínkami a různé teorémy pro vrstevnatá prostředí se nejlépe vyjadřují pomocí matic. Funkce $\mathcal{E}_x$ a $\mathcal{H}_y$ pro TE (resp. $\mathcal{H}_x$ a $\mathcal{E}_y$ pro TM) splňují lineární diferenciální rovnice druhého řádu, rovnice (3.2.42) pro TE [resp. rovnice (3.2.48) pro TM] z odst. 3.2. Jejich řešení $\mathcal{E}_x$ a $\mathcal{H}_y$ (resp. $\mathcal{H}_x$ a $\mathcal{E}_y$) tvoří lineární kombinace dvou partikulárních řešení, která označíme ${}^{(I)}\mathcal{E}_x$, ${}^{(II)}\mathcal{E}_x$ a ${}^{(I)}\mathcal{H}_y$, ${}^{(II)}\mathcal{H}_y$ pro TE (resp. ${}^{(I)}\mathcal{H}_x$, ${}^{(II)}\mathcal{H}_x$ a ${}^{(I)}\mathcal{E}_y$, ${}^{(II)}\mathcal{E}_y$ pro TM). Předpokládáme, že všechna partikulární řešení představují funkce se spojitými derivacemi.

3.3.1 TE případ

Vyšetříme nejprve TE případ. Řešení rovnic (3.2.42) můžeme zapsat

$$\mathcal{E}_x(z) \;=\; {}^{(I)}\mathcal{E}_x(z) + {}^{(II)}\mathcal{E}_x(z)\;, \tag{3.3.1a}$$
$$\mathcal{H}_y(z) \;=\; {}^{(I)}\mathcal{H}_y(z) + {}^{(II)}\mathcal{H}_y(z)\;. \tag{3.3.1b}$$

Řešení ${}^{(I)}\mathcal{E}_x$ a ${}^{(II)}\mathcal{E}_x$ jsou lineárně nezávislá. Rovněž řešení ${}^{(I)}\mathcal{H}_y$ a ${}^{(II)}\mathcal{H}_y$ jsou lineárně nezávislá. Jejich Wronskiány

$$\begin{vmatrix} {}^{(I)}\mathcal{E}_x(z) & {}^{(II)}\mathcal{E}_x(z) \\ \dfrac{\mathrm{d}^{(I)}\mathcal{E}_x(z)}{\mathrm{d}z} & \dfrac{\mathrm{d}^{(II)}\mathcal{E}_x(z)}{\mathrm{d}z} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{3.3.2}$$

resp.

$$\begin{vmatrix} {}^{(I)}\mathcal{H}_y(z) & {}^{(II)}\mathcal{H}_y(z) \\ \dfrac{\mathrm{d}^{(I)}\mathcal{H}_y(z)}{\mathrm{d}z} & \dfrac{\mathrm{d}^{(II)}\mathcal{H}_y(z)}{\mathrm{d}z} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{3.3.3}$$

musí být proto nenulové na nějakém intervalu $[a,b]$ $(a < b)$ proměnné z.

Na druhé straně tyto dvojice partikulárních řešení rovnic druhého řádu nejsou navzájem nezávislé.[5] Jsou vázány diferenciálními rovnicemi prvního řádu (3.2.37)

$$\frac{\mathrm{d}\ {}^{(I)}\mathcal{E}_x(z)}{\mathrm{d}z} = -\mathrm{j}k_0 \left(\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}\right)^{1/2} \kappa_m(z)\ {}^{(I)}\mathcal{H}_y(z)\ , \tag{3.3.4a}$$

$$\frac{\mathrm{d}\ {}^{(II)}\mathcal{E}_x(z)}{\mathrm{d}z} = -\mathrm{j}k_0 \left(\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}\right)^{1/2} \kappa_m(z)\ {}^{(II)}\mathcal{H}_y(z)\ , \tag{3.3.4b}$$

$$\frac{\mathrm{d}\ {}^{(I)}\mathcal{H}_y(z)}{\mathrm{d}z} = -\mathrm{j}k_0 \left(\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}\right)^{1/2} \left[\kappa_e(z) - \frac{N_y}{\kappa_m(z)}\right]\ {}^{(I)}\mathcal{E}_x(z) \tag{3.3.4c}$$

$$\frac{\mathrm{d}\ {}^{(II)}\mathcal{H}_y(z)}{\mathrm{d}z} = -\mathrm{j}k_0 \left(\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}\right)^{1/2} \left[\kappa_e(z) - \frac{N_y}{\kappa_m(z)}\right]\ {}^{(II)}\mathcal{E}_x(z)\ . \tag{3.3.4d}$$

Díky jim můžeme oba Wronskiány vyjádřit ve tvaru

$$\begin{vmatrix} {}^{(I)}\mathcal{E}_x(z) & {}^{(II)}\mathcal{E}_x(z) \\ {}^{(I)}\mathcal{H}_y(z) & {}^{(II)}\mathcal{H}_y(z) \end{vmatrix} \neq 0\,. \tag{3.3.5}$$

Ukážeme, že tento Wronskián je nezávislý na z. Rovnici v prvním řádku (3.3.4a) vynásobíme ${}^{(II)}\mathcal{H}_y(z)$, rovnici v druhém řádku (3.3.4b) vynásobíme ${}^{(I)}\mathcal{H}_y(z)$ a výsledky navzájem odečteme. Pravá strana rozdílu rovnic bude nulová

$${}^{(II)}\mathcal{H}_y \frac{\mathrm{d}\ {}^{(I)}\mathcal{E}_x}{\mathrm{d}z} - {}^{(I)}\mathcal{H}_y \frac{\mathrm{d}\ {}^{(II)}\mathcal{E}_x}{\mathrm{d}z} = 0\,. \tag{3.3.6}$$

Rovnici ve třetím řádku (3.3.4a) vynásobíme ${}^{(II)}\mathcal{E}_x(z)$, rovnici v druhém řádku (3.3.4b) vynásobíme ${}^{(I)}\mathcal{E}_x(z)$ a výsledky navzájem odečteme. Pravá strana rozdílu rovnic bude opět nulová

$${}^{(II)}\mathcal{E}_x \frac{\mathrm{d}\ {}^{(I)}\mathcal{H}_y}{\mathrm{d}z} - {}^{(I)}\mathcal{E}_x \frac{\mathrm{d}\ {}^{(II)}\mathcal{H}_y}{\mathrm{d}z} = 0\,. \tag{3.3.7}$$

Rovnice (3.3.6) a (3.3.7) sečteme

$${}^{(II)}\mathcal{H}_y \frac{\mathrm{d}\ {}^{(I)}\mathcal{E}_x}{\mathrm{d}z} - {}^{(I)}\mathcal{H}_y \frac{\mathrm{d}\ {}^{(II)}\mathcal{E}_x}{\mathrm{d}z} + {}^{(II)}\mathcal{E}_x \frac{\mathrm{d}\ {}^{(I)}\mathcal{H}_y}{\mathrm{d}z} - {}^{(I)}\mathcal{E}_x \frac{\mathrm{d}\ {}^{(II)}\mathcal{H}_y}{\mathrm{d}z} = 0\,, \tag{3.3.8}$$

tj.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left({}^{(I)}\mathcal{E}_x\ {}^{(II)}\mathcal{H}_y - {}^{(II)}\mathcal{E}_x\ {}^{(I)}\mathcal{H}_y\right) = 0\,. \tag{3.3.9}$$

Jinými slovy determinant

$${}^{\mathrm{TE}}\mathcal{D}(z) = \begin{vmatrix} {}^{(I)}\mathcal{E}_x(z) & {}^{(II)}\mathcal{E}_x(z) \\ {}^{(I)}\mathcal{H}_y(z) & {}^{(II)}\mathcal{H}_y(z) \end{vmatrix} = \text{constant} \tag{3.3.10}$$

obsahující dvojice partikulárních řešení pro TE polarizaci je nezávislý na z.

[5] Dvojice obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu (3.2.42) byla získána diferenciálními operacemi z rovnic prvního řádu (3.2.37). Užitím diferenciálních operací může dojít ke ztrátě informace a je proto nutno ověřit, zda řešení diferenciálních rovnic druhého řádu splňují také výchozí rovnice prvního řádu.

3.3.2 TM případ

Nyní se zabývejme TM případem. Postup je stejný jako v případě TE. Řešení rovnic (3.2.48) můžeme zapsat

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_x(z) &= {}^{(I)}\mathcal{H}_x(z) + {}^{(II)}\mathcal{H}_x(z) \, , && (3.3.11a) \\ \mathcal{E}_y(z) &= {}^{(I)}\mathcal{E}_y(z) + {}^{(II)}\mathcal{E}_y(z) \, . && (3.3.11b) \end{aligned}$$

Řešení ${}^{(I)}\mathcal{H}_x$ a ${}^{(II)}\mathcal{H}_x$ jsou lineárně nezávislá. Rovněž řešení ${}^{(I)}\mathcal{E}_y$ a ${}^{(II)}\mathcal{E}_y$ jsou lineárně nezávislá. Z toho plyne, že jejich Wronskiány

$$\begin{vmatrix} {}^{(I)}\mathcal{H}_x(z) & {}^{(II)}\mathcal{H}_x(z) \\ \dfrac{\mathrm{d}{}^{(I)}\mathcal{H}_x(z)}{\mathrm{d}z} & \dfrac{\mathrm{d}{}^{(II)}\mathcal{H}_x(z)}{\mathrm{d}z} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (3.3.12)$$

resp.

$$\begin{vmatrix} {}^{(I)}\mathcal{E}_y(z) & {}^{(II)}\mathcal{E}_y(z) \\ \dfrac{\mathrm{d}{}^{(I)}\mathcal{E}_y(z)}{\mathrm{d}z} & \dfrac{\mathrm{d}{}^{(II)}\mathcal{E}_y(z)}{\mathrm{d}z} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (3.3.13)$$

jsou nenulové na nějakém intervalu $[a,b]$ $(a < b)$ proměnné z.

Tyto dvojice partikulárních řešení rovnic druhého řádu nejsou navzájem nezávislé. Jsou vázány diferenciálními rovnicemi prvního řádu (3.2.46)

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\,{}^{(I)}\mathcal{H}_x(z)}{\mathrm{d}z} &= \mathrm{j}k_0 \left(\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}\right)^{1/2} \kappa_e(z)\ {}^{(I)}\mathcal{E}_y(z) \, , && (3.3.14a) \\ \frac{\mathrm{d}\,{}^{(II)}\mathcal{H}_x(z)}{\mathrm{d}z} &= \mathrm{j}k_0 \left(\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}\right)^{1/2} \kappa_e(z)\ {}^{(II)}\mathcal{E}_y(z) \, , && (3.3.14b) \\ \frac{\mathrm{d}\,{}^{(I)}\mathcal{E}_y(z)}{\mathrm{d}z} &= \mathrm{j}k_0 \left(\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}\right)^{1/2} \left[\kappa_m(z) - \frac{N_y}{\kappa_e(z)}\right] {}^{(I)}\mathcal{H}_x(z) && (3.3.14c) \\ \frac{\mathrm{d}\,{}^{(II)}\mathcal{E}_y(z)}{\mathrm{d}z} &= \mathrm{j}k_0 \left(\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}\right)^{1/2} \left[\kappa_m(z) - \frac{N_y}{\kappa_e(z)}\right] {}^{(II)}\mathcal{H}_x(z) \, . && (3.3.14d) \end{aligned}$$

Díky jim můžeme oba Wronskiány vyjádřit ve tvaru

$$\begin{vmatrix} {}^{(I)}\mathcal{H}_x(z) & {}^{(II)}\mathcal{H}_x(z) \\ {}^{(I)}\mathcal{E}_y(z) & {}^{(II)}\mathcal{E}_y(z) \end{vmatrix} \neq 0 \, . \qquad (3.3.15)$$

Ukážeme, že tento Wronskián je nezávislý na z. Rovnici v prvním řádku (3.3.14a) vynásobíme ${}^{(II)}\mathcal{E}_y(z)$ a rovnici v druhém řádku (3.3.14b) vynásobíme ${}^{(I)}\mathcal{E}_y(z)$ a výsledky navzájem odečteme. Pravá strana rozdílu rovnic bude nulová

$${}^{(II)}\mathcal{E}_y \frac{\mathrm{d}\,{}^{(I)}\mathcal{H}_x}{\mathrm{d}z} - {}^{(I)}\mathcal{E}_y \frac{\mathrm{d}\,{}^{(II)}\mathcal{H}_x}{\mathrm{d}z} = 0 \, . \qquad (3.3.16)$$

Rovnici ve třetím řádku (3.3.14a) vynásobíme ${}^{(II)}\mathcal{H}_x(z)$ a rovnici v druhém řádku (3.3.14b) vynásobíme ${}^{(I)}\mathcal{H}_x(z)$ a výsledky navzájem odečteme. Pravá strana rozdílu rovnic bude opět nulová

$${}^{(II)}\mathcal{H}_x \frac{\mathrm{d}\,{}^{(I)}\mathcal{E}_y}{\mathrm{d}z} - {}^{(I)}\mathcal{H}_x \frac{\mathrm{d}\,{}^{(II)}\mathcal{E}_y}{\mathrm{d}z} = 0 \, . \qquad (3.3.17)$$

Rovnice (3.3.16) a (3.3.17) sečteme

$$ {}^{(II)}\mathcal{E}_y \frac{\mathrm{d}\,{}^{(I)}\mathcal{H}_x}{\mathrm{d}z} - {}^{(I)}\mathcal{E}_y \frac{\mathrm{d}\,{}^{(II)}\mathcal{H}_x}{\mathrm{d}z} + {}^{(II)}\mathcal{H}_x \frac{\mathrm{d}\,{}^{(I)}\mathcal{E}_y}{\mathrm{d}z} - {}^{(I)}\mathcal{H}_x \frac{\mathrm{d}\,{}^{(II)}\mathcal{E}_y}{\mathrm{d}z} = 0\,, \tag{3.3.18} $$

tj.

$$ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left({}^{(I)}\mathcal{H}_x\, {}^{(II)}\mathcal{E}_y - {}^{(II)}\mathcal{H}_x\, {}^{(I)}\mathcal{E}_y \right) = 0\,. \tag{3.3.19} $$

Jinými slovy determinant

$$ {}^{\mathrm{TM}}\mathcal{D}\,(z) = \begin{vmatrix} {}^{(I)}\mathcal{H}_x\,(z) & {}^{(I)}\mathcal{E}_y\,(z) \\ {}^{(II)}\mathcal{H}_x\,(z) & {}^{(II)}\mathcal{E}_y\,(z) \end{vmatrix} = \text{constant} \tag{3.3.20} $$

obsahující dvojice partikulárních řešení pro TM polarizaci je nezávislý na z.

3.4 Homogenní vrstva

3.4.1 Reálné materiálové parametry $\varepsilon^{(n)}$ a $\mu^{(n)}$

Vyšetříme nejprve homogenní vrstvu charakterizovanou reálnými materiálovými parametry $\varepsilon^{(n)}$ a $\mu^{(n)}$. Uvnitř takové homogenní vrstvy (n) ohraničené rovinami $z = z^{(n-1)}$ a $z = z^{(n)}$, tj. v intervalu $z^{(n-1)}$ z $z^{(n)}$ jsou materiálové parametry $\varepsilon^{(n)}$ a $\mu^{(n)}$ reálné a nezávislé na souřadnici z. Pro homogenní vrstvu (n) má význam definice její tloušťky $d^{(n)}$. Ta je dána vztahem

$$ d^{(n)} = z^{(n)} - z^{(n-1)}\,. \tag{3.4.1} $$

Nechť $\theta^{(n)}$ označuje úhel mezi vektorem šíření rovinné monochromatické vlny ve vrstvě a normálou k ose multivrstvy, kterou jsme položili do osy z. V homogenním izotropním prostředí dielektrické vrstvy můžeme definovat reálný index lomu

$$ n^{(n)} = \left(\kappa_e^{(n)}\kappa_m^{(n)}\right)^{1/2}\,. \tag{3.4.2} $$

Potom podle rovnice (3.2.50)

$$ N_y \;=\; n^{(n)} \sin\theta^{(n)}\,. \tag{3.4.3} $$

Pro TE vlnu dostaneme z rovnice (3.2.42)

$$ \frac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}_x^{(n)}\,(z)}{\mathrm{d}z^2} + \left(k_0^2 n^{(n)2}\cos^2\theta^{(n)}\right)\mathcal{E}_x^{(n)}\,(z) \;=\; 0\,. \tag{3.4.4a} $$

$$ \frac{\mathrm{d}^2\mathcal{H}_y^{(n)}\,(z)}{\mathrm{d}z^2} + \left(k_0^2 n^{(n)2}\cos^2\theta^{(n)}\right)\mathcal{H}_y^{(n)}\,(z) \;=\; 0\,. \tag{3.4.4b} $$

Rovnice mají stejnou strukturu. Jejich dvě lineárně nezávislá řešení mohou být proto zvolena pro obě rovnice stejná. Lineární kombinace těchto dvou řešení tvořící obecné řešení rovnic (3.4.4) bez pravé strany musí být v souladu s vázanými rovnicemi prvního řádu (3.2.37). Řešení těchto rovnic splňující dvojici vázaných diferenciálních rovnice prvního řádu (3.2.37) můžeme zapsat ve tvaru

$$\mathcal{E}_x^{(n)}(z) = A^{(n)} \cos\left[k_0 n^{(n)}\left(z - z^{(n-1)}\right)\cos\theta^{(n)}\right] + B^{(n)} \sin\left[k_0 n^{(n)}\left(z - z^{(n-1)}\right)\cos\theta^{(n)}\right] , \tag{3.4.5a}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_y^{(n)}(z) &= \mathrm{j}\left(\frac{\varepsilon_0 \kappa_e^{(n)}}{\mu_0 \kappa_m^{(n)}}\right)^{1/2} \cos\theta^{(n)} \\ &\times \left\{B^{(n)} \cos\left[k_0 n^{(n)}\left(z - z^{(n-1)}\right)\cos\theta^{(n)}\right] - A^{(n)} \sin\left[k_0 n^{(n)}\left(z - z^{(n-1)}\right)\cos\theta^{(n)}\right]\right\} . \end{aligned} \tag{3.4.5b}$$

Konstanty $A^{(n)}$ a $B^{(n)}$ jsme zvolili tak, aby v rovině $z = z^{(n-1)}$ platilo

$$\mathcal{E}_x^{(n)}\left(z^{(n-1)}\right) = A^{(n)} , \tag{3.4.6a}$$

$$\mathcal{H}_y^{(n)}\left(z^{(n-1)}\right) = \mathrm{j}\left(\frac{\varepsilon_0 \kappa_e^{(n)}}{\mu_0 \kappa_m^{(n)}}\right)^{1/2} \cos\theta^{(n)} B^{(n)} . \tag{3.4.6b}$$

neboli

$$A^{(n)} = \mathcal{E}_x^{(n)}\left(z^{(n-1)}\right) , \tag{3.4.7a}$$

$$B^{(n)} = -\frac{\mathrm{j}}{\cos\theta^{(n)}}\left(\frac{\mu_0 \kappa_m^{(n)}}{\varepsilon_0 \kappa_e^{(n)}}\right)^{1/2} \mathcal{H}_y^{(n)}\left(z^{(n-1)}\right) . \tag{3.4.7b}$$

Partikulární řešení vyjádříme takto podle rovnic (3.3.1)

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_x(z) &= {}^{(I)}\mathcal{E}_x(z) + {}^{(II)}\mathcal{E}_x(z) , \\ \mathcal{H}_y(z) &= {}^{(I)}\mathcal{H}_y(z) + {}^{(II)}\mathcal{H}_y(z) . \end{aligned}$$

s ohledem na podmínky vyjádřené rovnicemi (3.2.37) a (3.3.4) takto

$${}^{(I)}\mathcal{E}_x^{(n)}\left(z - z^{(n-1)}\right) = -\frac{\mathrm{j}}{\cos\theta^{(n)}}\left(\frac{\mu_0 \kappa_m^{(n)}}{\varepsilon_0 \kappa_e^{(n)}}\right)^{1/2} \mathcal{H}_y^{(n)}\left(z^{(n-1)}\right) \sin\left[k_0 n^{(n)}\left(z - z^{(n-1)}\right)\cos\theta^{(n)}\right] , \tag{3.4.9a}$$

$${}^{(I)}\mathcal{H}_y^{(n)}\left(z - z^{(n-1)}\right) = \mathcal{H}_y^{(n)}\left(z^{(n-1)}\right) \cos\left[k_0 n^{(n)}\left(z - z^{(n-1)}\right)\cos\theta^{(n)}\right] , \tag{3.4.9b}$$

$${}^{(II)}\mathcal{E}_x^{(n)}\left(z - z^{(n-1)}\right) = \mathcal{E}_x^{(n)}\left(z^{(n-1)}\right) \cos\left[k_0 n^{(n)}\left(z - z^{(n-1)}\right)\cos\theta^{(n)}\right] , \tag{3.4.9c}$$

$${}^{(II)}\mathcal{H}_y^{(n)}\left(z - z^{(n-1)}\right) = -\mathrm{j}\cos\theta^{(n)}\left(\frac{\varepsilon_0 \kappa_e^{(n)}}{\mu_0 \kappa_m^{(n)}}\right)^{1/2} \mathcal{E}_x^{(n)}\left(z^{(n-1)}\right) \sin\left[k_0 n^{(n)}\left(z - z^{(n-1)}\right)\cos\theta^{(n)}\right] . \tag{3.4.9d}$$

Do rovnic (3.4.5) dosadíme za konstanty $A^{(n)}$ a $B^{(n)}$ podle rovnic (3.4.7),

$$\begin{aligned}
&\mathcal{E}_x^{(n)}(z) \\
&= \mathcal{E}_x^{(n)}\left(z^{(n-1)}\right)\cos\left[k_0 n^{(n)}\left(z - z^{(n-1)}\right)\cos\theta^{(n)}\right] \\
&\quad -\mathcal{H}_y^{(n)}\left(z^{(n-1)}\right)\frac{\mathrm{j}}{\cos\theta^{(n)}}\left(\frac{\mu^{(n)}}{\varepsilon^{(n)}}\right)^{1/2}\sin\left[k_0 n^{(n)}\left(z - z^{(n-1)}\right)\cos\theta^{(n)}\right] ,
\end{aligned} \tag{3.4.10a}$$

$$\begin{aligned}
&\mathcal{H}_y^{(n)}(z) \\
&= -\mathcal{E}_x^{(n)}\left(z^{(n-1)}\right)\mathrm{j}\cos\theta^{(n)}\left(\frac{\varepsilon^{(n)}}{\mu^{(n)}}\right)^{1/2}\sin\left[k_0 n^{(n)}\left(z - z^{(n-1)}\right)\cos\theta^{(n)}\right] \\
&\quad +\mathcal{H}_y^{(n)}\left(z^{(n-1)}\right)\cos\left[k_0 n^{(n)}\left(z - z^{(n-1)}\right)\cos\theta^{(n)}\right] .
\end{aligned} \tag{3.4.10b}$$

Vztahy mezi vektory pole v rovinách $z = z^{(n-1)}$ a $z = z^{(n)}$ ve vzájemné vzdálenosti $d^{(n)}$ a tedy vymezujících vrstvu n zapíšeme v maticovém tvaru

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} \mathcal{E}_x^{(n)}\left(z^{(n)}\right) \\ \mathcal{H}_y^{(n)}\left(z^{(n)}\right) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\left(k_0 n^{(n)} d^{(n)}\cos\theta^{(n)}\right) & -\frac{\mathrm{j}}{\cos\theta^{(n)}}\left(\frac{\mu^{(n)}}{\varepsilon^{(n)}}\right)^{1/2}\sin\left(k_0 n^{(n)} d^{(n)}\cos\theta^{(n)}\right) \\ -\mathrm{j}\cos\theta^{(n)}\left(\frac{\varepsilon^{(n)}}{\mu^{(n)}}\right)^{1/2}\sin\left(k_0 n^{(n)} d^{(n)}\cos\theta^{(n)}\right) & \cos\left(k_0 n^{(n)} d^{(n)}\cos\theta^{(n)}\right) \end{pmatrix} \\
&\quad\times\begin{pmatrix} \mathcal{E}_x^{(n)}\left(z^{(n-1)}\right) \\ \mathcal{H}_y^{(n)}\left(z^{(n-1)}\right) \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{3.4.11}$$

Ke kaskádnímu uspořádání vrstev do multivrstvy je vyhodnější obrácená relace

$$\begin{pmatrix} \mathcal{E}_x^{(n)}\left(z^{(n-1)}\right) \\ \mathcal{H}_y^{(n)}\left(z^{(n-1)}\right) \end{pmatrix} = {}^{\mathrm{TE}}\mathbf{S}^{(n)}\left(d^{(n)}\right)\begin{pmatrix} \mathcal{E}_x^{(n)}\left(z^{(n)}\right) \\ \mathcal{H}_y^{(n)}\left(z^{(n)}\right) \end{pmatrix} \tag{3.4.12}$$

Matice ${}^{\mathrm{TE}}\mathbf{S}\left(d^{(n)}\right)$ je *charakteristická matice* homogenní vrstvy tloušťky $d^{(n)}$ pro TE polarizaci. Váže tečné složky vektorů polí ve vrstvě těsně (infinitesimálně blízko) u předního rozhraní $z = z^{(n-1)}$ s tečnými složkami vektorů polí těsně u zadního rozhraní $z = z^{(n)}$. Získáme ji jako matici inverzní k matici 2×2 vystupující v rovnici (3.4.11)

$$\begin{aligned}
&{}^{\mathrm{TE}}\mathbf{S}^{(n)}\left(d^{(n)}\right) \\
&= \begin{pmatrix} \cos\left(k_0 n^{(n)} d^{(n)}\cos\theta^{(n)}\right) & \frac{\mathrm{j}}{\cos\theta^{(n)}}\left(\frac{\mu_0\kappa_m^{(n)}}{\varepsilon_0\kappa_e^{(n)}}\right)^{1/2}\sin\left(k_0 n^{(n)} d^{(n)}\cos\theta^{(n)}\right) \\ \mathrm{j}\cos\theta^{(n)}\left(\frac{\varepsilon_0\kappa_e^{(n)}}{\mu_0\kappa_m^{(n)}}\right)^{1/2}\sin\left(k_0 n^{(n)} d^{(n)}\cos\theta^{(n)}\right) & \cos\left(k_0 n^{(n)} d^{(n)}\cos\theta^{(n)}\right) \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{3.4.13}$$

Její determinant je roven jedné.

Charakteristickou matici homogenní vrstvy pro TM polarizaci dostaneme z dualitní transformace (její determinant je rovněž roven jedné), tj. záměnou $\mu_0\kappa_m^{(n)} \leftrightarrow \varepsilon_0\kappa_e^{(n)}$

$$
{}^{\mathrm{TM}}\mathbf{S}\left(d^{(n)}\right) = \begin{pmatrix} \cos\left(k_0 n^{(n)} d^{(n)} \cos\theta^{(n)}\right) & \dfrac{\mathrm{j}}{\cos\theta^{(n)}}\left(\dfrac{\varepsilon_0\kappa_e}{\mu_0\kappa_m}\right)^{1/2} \sin\left(k_0 n^{(n)} d^{(n)} \cos\theta^{(n)}\right) \\ \mathrm{j}\cos\theta^{(n)}\left(\dfrac{\mu_0\kappa_m^{(n)}}{\varepsilon_0\kappa_e^{(n)}}\right)^{1/2} \sin\left(k_0 n^{(n)} d^{(n)} \cos\theta^{(n)}\right) & \cos\left(k_0 n^{(n)} d^{(n)} \cos\theta^{(n)}\right) \end{pmatrix} \tag{3.4.14}
$$

Tomu odpovídá záměna polí vázaných dualitou $\mathcal{E}_x \to \mathcal{H}_x$ a $\mathcal{H}_y \to -\mathcal{E}_y$

$$
\begin{pmatrix} \mathcal{H}_x\left(z^{(n-1)}\right) \\ -\mathcal{E}_y\left(z^{(n-1)}\right) \end{pmatrix} = {}^{\mathrm{TM}}\mathbf{S}^{(n)}\left(d^{(n)}\right) \begin{pmatrix} \mathcal{H}_x\left(z^{(n)}\right) \\ -\mathcal{E}_y\left(z^{(n)}\right) \end{pmatrix} \tag{3.4.15}
$$

Úplnou charakteristickou matici vrstvy o rozměru 4×4 můžeme zapsat

$$
\mathbf{S}\left(d^{(n)}\right) = \begin{pmatrix} {}^{\mathrm{TE}}\mathbf{S}\left(d^{(n)}\right) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}^{\mathrm{TM}}\mathbf{S}\left(d^{(n)}\right) \end{pmatrix}, \tag{3.4.16}
$$

kde nediagonální bloky 2×2 tvoří nulové matice $\mathbf{0}$. Charakteristická matice homogenní vrstvy je nezávislá na souřadnici z. Individuální vrstvy pak můžeme v libovolném pořadí sestavit do kaskád (multivrstev). Rovnice (3.4.12) a (3.4.15) můžeme vyjádřit jedinou

$$
\begin{pmatrix} \mathcal{E}_x\left(z^{(n-1)}\right) \\ \mathcal{H}_y\left(z^{(n-1)}\right) \\ \mathcal{H}_x\left(z^{(n-1)}\right) \\ -\mathcal{E}_y\left(z^{(n-1)}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^{\mathrm{TE}}\mathbf{S}\left(d^{(n)}\right) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}^{\mathrm{TM}}\mathbf{S}\left(d^{(n)}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{E}_x\left(z^{(n)}\right) \\ \mathcal{H}_y\left(z^{(n)}\right) \\ \mathcal{H}_x\left(z^{(n)}\right) \\ -\mathcal{E}_y\left(z^{(n)}\right) \end{pmatrix}, \tag{3.4.17}
$$

Matice (3.4.13) a (3.4.14) lze diagonalizovat

$$
\begin{aligned}
{}^{\mathrm{TE}}\mathbf{S}^{(n)}\left(d^{(n)}\right) &= \begin{pmatrix} \cos\beta^{(n)} & \mathrm{j}\left(Y^{(n)}\cos\theta^{(n)}\right)^{-1}\sin\beta^{(n)} \\ \mathrm{j}\left(Y^{(n)}\cos\theta^{(n)}\right)\sin\beta^{(n)} & \cos\beta^{(n)} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ Y^{(n)}\cos\theta^{(n)} & -Y^{(n)}\cos\theta^{(n)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \exp\left(\mathrm{j}\beta^{(n)}\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(-\mathrm{j}\beta^{(n)}\right) \end{pmatrix} \\
&\quad \times \left(2Y^{(n)}\cos\theta^{(n)}\right)^{-1} \begin{pmatrix} Y^{(n)}\cos\theta^{(n)} & 1 \\ Y^{(n)}\cos\theta^{(n)} & -1 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{3.4.18a}
$$

$$
\begin{aligned}
{}^{\mathrm{TM}}\mathbf{S}^{(n)}\left(d^{(n)}\right) &= \begin{pmatrix} \cos\beta^{(n)} & \mathrm{j}\left(Z^{(n)}\cos\theta^{(n)}\right)\sin\beta^{(n)} \\ \mathrm{j}\left(Z^{(n)}\cos\theta^{(n)}\right)\sin\beta^{(n)} & \cos\beta^{(n)} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ Z^{(n)}\cos\theta^{(n)} & -Z^{(n)}\cos\theta^{(n)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \exp\left(\mathrm{j}\beta^{(n)}\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(-\mathrm{j}\beta^{(n)}\right) \end{pmatrix} \\
&\quad \times \left(2Z^{(n)}\cos\theta^{(n)}\right)^{-1} \begin{pmatrix} Z^{(n)}\cos\theta^{(n)} & 1 \\ Z^{(n)}\cos\theta^{(n)} & -1 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{3.4.18b}
$$

Použili jsme stručnější zápis s označením

$$Z^{(n)} = \left(Y^{(n)}\right)^{-1} = \left(\frac{\mu^{(n)}}{\varepsilon^{(n)}}\right)^{1/2} \tag{3.4.19a}$$

$$\beta^{(n)} = k_0 n^{(n)} d^{(n)} \cos\theta^{(n)} . \tag{3.4.19b}$$

Zjišťujeme, že matice vystupující na pravých stranách těchto rovnic a nezávislé na tloušťce vrstvy $d^{(n)}$ (zahrnuté v parametru $\beta^{(n)}$) splňují

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ Y^{(n)}\cos\theta^{(n)} & -Y^{(n)}\cos\theta^{(n)} \end{pmatrix}^{-1} = \left(2Y^{(n)}\cos\theta^{(n)}\right)^{-1} \begin{pmatrix} Y^{(n)}\cos\theta^{(n)} & 1 \\ Y^{(n)}\cos\theta^{(n)} & -1 \end{pmatrix} \tag{3.4.20a}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ Z^{(n)}\cos\theta^{(n)} & -Z^{(n)}\cos\theta^{(n)} \end{pmatrix}^{-1} = \left(2Z^{(n)}\cos\theta^{(n)}\right)^{-1} \begin{pmatrix} Z^{(n)}\cos\theta^{(n)} & 1 \\ Z^{(n)}\cos\theta^{(n)} & -1 \end{pmatrix} \tag{3.4.20b}$$

Z jejich nezávislosti na $d^{(n)}$ usuzujeme, že charakterizují levé resp. pravé rozhraní vrstvy. Označíme $\mathcal{E}_+^{(n)}$, resp. $\mathcal{E}_-^{(n)}$ a $\mathcal{H}_+^{(n)}$, resp. $\mathcal{H}_-^{(n)}$ elektrická pole (s polarizací TE) a magnetická pole (s polarizací TM) vln postupujících homogenní vrstvou (n) s kladnou, resp. zápornou orientací z-složky vektoru šíření. Maticím charakterizujícím rozhraní můžeme přisoudit význam následujícími vztahy platnými na rozhraní $z = = z^{(n-1)}$. Pro TE případ

$$\begin{pmatrix} \mathcal{E}_x^{(n)}\left(z^{(n-1)}\right) \\ \mathcal{H}_y^{(n)}\left(z^{(n-1)}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ Y^{(n)}\cos\theta^{(n)} & -Y^{(n)}\cos\theta^{(n)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{E}_+^{(n)}\left(z^{(n-1)}\right) \\ \mathcal{E}_-^{(n)}\left(z^{(n-1)}\right) \end{pmatrix} , \tag{3.4.21a}$$

a pro TM případ

$$\begin{pmatrix} \mathcal{H}_x^{(n)}\left(z^{(n-1)}\right) \\ -\mathcal{E}_y^{(n)}\left(z^{(n-1)}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ Z^{(n)}\cos\theta^{(n)} & -Z^{(n)}\cos\theta^{(n)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{H}_+^{(n)}\left(z^{(n-1)}\right) \\ \mathcal{H}_-^{(n)}\left(z^{(n-1)}\right) \end{pmatrix} \tag{3.4.21b}$$

Podobně na rozhraní $z = z^{(n)}$

$$\begin{pmatrix} \mathcal{E}_+^{(n)}\left(z^{(n)}\right) \\ \mathcal{E}_-^{(n)}\left(z^{(n)}\right) \end{pmatrix} = \left(2Y^{(n)}\cos\theta^{(n)}\right)^{-1} \begin{pmatrix} Y^{(n)}\cos\theta^{(n)} & 1 \\ Y^{(n)}\cos\theta^{(n)} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{E}_x^{(n)}\left(z^{(n)}\right) \\ \mathcal{H}_y^{(n)}\left(z^{(n)}\right) \end{pmatrix} \tag{3.4.22a}$$

$$\begin{pmatrix} \mathcal{H}_+^{(n)}\left(z^{(n)}\right) \\ \mathcal{H}_-^{(n)}\left(z^{(n)}\right) \end{pmatrix} = \left(2Z^{(n)}\cos\theta^{(n)}\right)^{-1} \begin{pmatrix} Z^{(n)}\cos\theta^{(n)} & 1 \\ Z^{(n)}\cos\theta^{(n)} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{H}_x^{(n)}\left(z^{(n)}\right) \\ -\mathcal{E}_y^{(n)}\left(z^{(n)}\right) \end{pmatrix} \tag{3.4.22b}$$

Vyšetříme jednoduché rozhraní dvou prostředí $(n-1)$ a (n) situované v rovině $z = z^{(n-1)}$. Z rovnosti tečných složek polí

$$\begin{pmatrix} \mathcal{E}_x^{(n-1)}\left(z^{(n-1)}\right) \\ \mathcal{H}_y^{(n-1)}\left(z^{(n-1)}\right) \\ \mathcal{H}_x^{(n-1)}\left(z^{(n-1)}\right) \\ -\mathcal{E}_y^{(n-1)}\left(z^{(n-1)}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_x^{(n)}\left(z^{(n-1)}\right) \\ \mathcal{H}_y^{(n)}\left(z^{(n-1)}\right) \\ \mathcal{H}_x^{(n)}\left(z^{(n-1)}\right) \\ -\mathcal{E}_y^{(n)}\left(z^{(n-1)}\right) \end{pmatrix} , \tag{3.4.23}$$

dostaneme pro TE případ

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \mathcal{E}_+^{(n-1)}\left(z^{(n-1)}\right) \\ \mathcal{E}_-^{(n-1)}\left(z^{(n-1)}\right) \end{pmatrix} &= \left(2Y^{(n-1)}\cos\theta^{(n-1)}\right)^{-1} \begin{pmatrix} Y^{(n-1)}\cos\theta^{(n-1)} & 1 \\ Y^{(n-1)}\cos\theta^{(n-1)} & -1 \end{pmatrix} \\
&\quad \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ Y^{(n)}\cos\theta^{(n)} & -Y^{(n)}\cos\theta^{(n)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{E}_+^{(n)}\left(z^{(n-1)}\right) \\ \mathcal{E}_-^{(n)}\left(z^{(n-1)}\right) \end{pmatrix} \\
&= \left(2Y^{(n-1)}\cos\theta^{(n-1)}\right)^{-1} \\
&\quad \times \begin{pmatrix} Y^{(n-1)}\cos\theta^{(n-1)} + Y^{(n)}\cos\theta^{(n)} & Y^{(n-1)}\cos\theta^{(n-1)} - Y^{(n)}\cos\theta^{(n)} \\ Y^{(n-1)}\cos\theta^{(n-1)} - Y^{(n)}\cos\theta^{(n)} & Y^{(n-1)}\cos\theta^{(n-1)} + Y^{(n)}\cos\theta^{(n)} \end{pmatrix} \\
&\quad \times \begin{pmatrix} \mathcal{E}_+^{(n)}\left(z^{(n-1)}\right) \\ \mathcal{E}_-^{(n)}\left(z^{(n-1)}\right) \end{pmatrix}, \qquad (3.4.24a)
\end{aligned}$$

a pro TM případ

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \mathcal{H}_+^{(n-1)}\left(z^{(n-1)}\right) \\ \mathcal{H}_-^{(n-1)}\left(z^{(n-1)}\right) \end{pmatrix} &= \left(2Z^{(n-1)}\cos\theta^{(n-1)}\right)^{-1} \begin{pmatrix} Z^{(n-1)}\cos\theta^{(n-1)} & 1 \\ Z^{(n-1)}\cos\theta^{(n-1)} & -1 \end{pmatrix} \\
&\quad \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ Z^{(n)}\cos\theta^{(n)} & -Z^{(n)}\cos\theta^{(n)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{H}_+^{(n)}\left(z^{(n-1)}\right) \\ \mathcal{H}_-^{(n)}\left(z^{(n-1)}\right) \end{pmatrix} \\
&= \left(2Z^{(n-1)}\cos\theta^{(n-1)}\right)^{-1} \\
&\quad \times \begin{pmatrix} Z^{(n-1)}\cos\theta^{(n-1)} + Z^{(n)}\cos\theta^{(n)} & Z^{(n-1)}\cos\theta^{(n-1)} - Z^{(n)}\cos\theta^{(n)} \\ Z^{(n-1)}\cos\theta^{(n-1)} - Z^{(n)}\cos\theta^{(n)} & Z^{(n-1)}\cos\theta^{(n-1)} + Z^{(n)}\cos\theta^{(n)} \end{pmatrix} \\
&\quad \times \begin{pmatrix} \mathcal{H}_+^{(n)}\left(z^{(n-1)}\right) \\ \mathcal{H}_-^{(n)}\left(z^{(n-1)}\right) \end{pmatrix}. \qquad (3.4.24b)
\end{aligned}$$

Definujeme reflexní a transmisní koeficienty pro naše jednoduché rozhraní v rovině $z = z^{(n-1)}$. Pro TE vlnu dopadající z prostředí $(n-1)$ reflexní koeficient definujeme

$$r_{TE}^{(n-1,n)} = \left[\frac{\mathcal{E}_-^{(n-1)}}{\mathcal{E}_+^{(n-1)}}\right]_{\mathcal{E}_-^{(n)}=0}, \qquad (3.4.25a)$$

transmisní koeficient definujeme

$$t_{TE}^{(n-1,n)} = \left[\frac{\mathcal{E}_+^{(n)}}{\mathcal{E}_+^{(n-1)}}\right]_{\mathcal{E}_-^{(n)}=0}, \qquad (3.4.25b)$$

Pro TE vlnu dopadající z prostředí (n) reflexní koeficient definujeme

$$r_{TE}^{(n,n-1)} = \left[\frac{\mathcal{E}_+^{(n)}}{\mathcal{E}_-^{(n)}}\right]_{\mathcal{E}_+^{(n-1)}=0}, \qquad (3.4.25c)$$

transmisní koeficient definujeme

$$t_{TE}^{(n,n-1)} = \left[\frac{\mathcal{E}_-^{(n-1)}}{\mathcal{E}_-^{(n)}}\right]_{\mathcal{E}_+^{(n-1)}=0}, \tag{3.4.25d}$$

Dosazením podle rovnice (3.4.24a) máme nejprve pro TE vlnu dopadající z prostředí $(n-1)$

$$\mathcal{E}_+^{(n-1)}\left(z^{(n-1)}\right) = \left(2Y^{(n-1)}\cos\theta^{(n-1)}\right)^{-1}\left(Y^{(n-1)}\cos\theta^{(n-1)} + Y^{(n)}\cos\theta^{(n)}\right)\mathcal{E}_+^{(n)}\left(z^{(n-1)}\right) \tag{3.4.26a}$$

$$\mathcal{E}_-^{(n-1)}\left(z^{(n-1)}\right) = \left(2Y^{(n-1)}\cos\theta^{(n-1)}\right)^{-1}\left(Y^{(n-1)}\cos\theta^{(n-1)} - Y^{(n)}\cos\theta^{(n)}\right)\mathcal{E}_+^{(n)}\left(z^{(n-1)}\right). \tag{3.4.26b}$$

Odtud s uvážením rovnic (3.4.25a) a (3.4.25b)

$$r_{TE}^{(n-1,n)} = \frac{Y^{(n-1)}\cos\theta^{(n-1)} - Y^{(n)}\cos\theta^{(n)}}{Y^{(n-1)}\cos\theta^{(n-1)} + Y^{(n)}\cos\theta^{(n)}}, \tag{3.4.27a}$$

$$t_{TE}^{(n-1,n)} = \frac{2Y^{(n-1)}\cos\theta^{(n-1)}}{Y^{(n-1)}\cos\theta^{(n-1)} + Y^{(n)}\cos\theta^{(n)}}. \tag{3.4.27b}$$

Pro TE vlnu dopadající z prostředí (n)

$$\begin{aligned} 0 = {} & \left(2Y^{(n-1)}\cos\theta^{(n-1)}\right)^{-1} \\ & \times\left[\left(Y^{(n-1)}\cos\theta^{(n-1)} + Y^{(n)}\cos\theta^{(n)}\right)\mathcal{E}_+^{(n)}\left(z^{(n-1)}\right)\right. \\ & \left. + \left(Y^{(n-1)}\cos\theta^{(n-1)} - Y^{(n)}\cos\theta^{(n)}\right)\mathcal{E}_-^{(n)}\left(z^{(n-1)}\right)\right] \end{aligned} \tag{3.4.28a}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_-^{(n-1)}\left(z^{(n-1)}\right) = {} & \left(2Y^{(n-1)}\cos\theta^{(n-1)}\right)^{-1} \\ & \times\left[\left(Y^{(n-1)}\cos\theta^{(n-1)} - Y^{(n)}\cos\theta^{(n)}\right)\mathcal{E}_+^{(n)}\left(z^{(n-1)}\right)\right. \\ & \left. + \left(Y^{(n-1)}\cos\theta^{(n-1)} + Y^{(n)}\cos\theta^{(n)}\right)\mathcal{E}_-^{(n)}\left(z^{(n-1)}\right)\right]. \end{aligned} \tag{3.4.28b}$$

Reflexní koeficient definovaný rovnicí (3.4.25c) plyne z rovnice (3.4.28a)

$$r_{TE}^{(n,n-1)} = -\frac{Y^{(n-1)}\cos\theta^{(n-1)} - Y^{(n)}\cos\theta^{(n)}}{Y^{(n-1)}\cos\theta^{(n-1)} + Y^{(n)}\cos\theta^{(n)}}. \tag{3.4.29a}$$

K výpočtu transmisního koeficientu definovaného rovnicí (3.4.25d) vyloučíme $\mathcal{E}_+^{(n)}\left(z^{(n-1)}\right)$ z rovnice (3.4.28b) pomocí rovnice (3.4.28a)

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathcal{E}_-^{(n-1)}\left(z^{(n-1)}\right)}{\mathcal{E}_-^{(n)}\left(z^{(n-1)}\right)} &= \left(2Y^{(n-1)}\cos\theta^{(n-1)}\right)^{-1} \\
&\quad \times \left[-\left(Y^{(n-1)}\cos\theta^{(n-1)} - Y^{(n)}\cos\theta^{(n)}\right)\frac{Y^{(n-1)}\cos\theta^{(n-1)} - Y^{(n)}\cos\theta^{(n)}}{Y^{(n-1)}\cos\theta^{(n-1)} + Y^{(n)}\cos\theta^{(n)}}\right. \\
&\quad \left. + \left(Y^{(n-1)}\cos\theta^{(n-1)} + Y^{(n)}\cos\theta^{(n)}\right)\right] \\
&= \frac{\left(Y^{(n-1)}\cos\theta^{(n-1)} + Y^{(n)}\cos\theta^{(n)}\right)^2 - \left(Y^{(n-1)}\cos\theta^{(n-1)} - Y^{(n)}\cos\theta^{(n)}\right)^2}{\left(2Y^{(n-1)}\cos\theta^{(n-1)}\right)\left(Y^{(n-1)}\cos\theta^{(n-1)} + Y^{(n)}\cos\theta^{(n)}\right)} \\
&= \frac{4Y^{(n-1)}\cos\theta^{(n-1)}Y^{(n)}\cos\theta^{(n)}}{\left(2Y^{(n-1)}\cos\theta^{(n-1)}\right)\left(Y^{(n-1)}\cos\theta^{(n-1)} + Y^{(n)}\cos\theta^{(n)}\right)}
\end{aligned}
$$

a odtud

$$
t_{TE}^{(n,n-1)} = \frac{2Y^{(n)}\cos\theta^{(n)}}{Y^{(n-1)}\cos\theta^{(n-1)} + Y^{(n)}\cos\theta^{(n)}} \,. \tag{3.4.29b}
$$

Pro magnetické pole TM vlny dopadající z prostředí $(n-1)$ užitím dualitní transformace rovnic (3.4.25a), (3.4.25b), (3.4.27a) a (3.4.27b) máme

$$
\left[\frac{\mathcal{H}_-^{(n-1)}}{\mathcal{H}_+^{(n-1)}}\right]_{\mathcal{E}_-^{(n)}=0} = \frac{Z^{(n-1)}\cos\theta^{(n-1)} - Z^{(n)}\cos\theta^{(n)}}{Z^{(n-1)}\cos\theta^{(n-1)} + Z^{(n)}\cos\theta^{(n)}} \,, \tag{3.4.30a}
$$

$$
\left[\frac{\mathcal{H}_-^{(n-1)}}{\mathcal{H}_+^{(n-1)}}\right]_{\mathcal{E}_-^{(n)}=0} = \frac{2Z^{(n-1)}\cos\theta^{(n-1)}}{Z^{(n-1)}\cos\theta^{(n-1)} + Z^{(n)}\cos\theta^{(n)}} \,. \tag{3.4.30b}
$$

. V případě magnetického pole TM vlny dopadající z prostředí (n) dostaneme podobně užitím dualitní transformace rovnic (3.4.25c), (3.4.25d), (3.4.29a) a (3.4.29b)

$$
\left[\frac{\mathcal{H}_+^{(n)}}{\mathcal{H}_-^{(n)}}\right]_{\mathcal{H}_+^{(n-1)}=0} = -\frac{Z^{(n-1)}\cos\theta^{(n-1)} - Z^{(n)}\cos\theta^{(n)}}{Z^{(n-1)}\cos\theta^{(n-1)} + Z^{(n)}\cos\theta^{(n)}} \,. \tag{3.4.31a}
$$

$$
\left[\frac{\mathcal{H}_-^{(n-1)}}{\mathcal{H}_-^{(n)}}\right]_{\mathcal{H}_+^{(n-1)}=0} = \frac{2Z^{(n)}\cos\theta^{(n)}}{Z^{(n-1)}\cos\theta^{(n-1)} + Z^{(n)}\cos\theta^{(n)}} \,. \tag{3.4.31b}
$$

Nyní je nutno poměry amplitud magnetických polí vyjádřit pomocí elektrických polí. K tomu využijeme Maxwellovy rovnice pro rovinné monochromatické vlny v izotropních lineárních prostředích

$$
\begin{aligned}
\gamma \times \boldsymbol{E} &= Z\boldsymbol{H} \,, & (3.4.32a) \\
\gamma \times Z\boldsymbol{H} &= -\boldsymbol{E} \,, & (3.4.32b)
\end{aligned}
$$

kde jednotkový vektor γ má orientaci vektoru šíření dopadající (i), odražené (r), nebo procházející (t) vlny

$$\begin{aligned}
\gamma^{(i)} &= \hat{\boldsymbol{y}} \sin\theta^{i} + \hat{\boldsymbol{z}} \cos\theta^{(i)}\,, && (3.4.33a)\\
\gamma^{(r)} &= \hat{\boldsymbol{y}} \sin\theta^{i} - \hat{\boldsymbol{z}} \cos\theta^{(i)}\,, && (3.4.33b)\\
\gamma^{(t)} &= \hat{\boldsymbol{y}} \sin\theta^{i} + \hat{\boldsymbol{z}} \cos\theta^{(t)}\,. && (3.4.33c)
\end{aligned}$$

Označíme $Z^{(n-1)}\mathcal{H}_x^{(i)} = \mathcal{E}_y^{(i)} = Z^{(n-1)}\mathcal{H}_+^{(n-1)} = \mathcal{E}_+^{(n-1)}$, $Z^{(n-1)}\mathcal{H}_x^{(r)} = Z^{(n-1)}\mathcal{H}_-^{(n-1)} = = \mathcal{E}_-^{(n-1)}$ a $Z^{(n)}\mathcal{H}_x^{(t)} = Z^{(n)}\mathcal{H}_+^{(n)} = \mathcal{E}_+^{(n)}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_y^{(i)} &= -Z^{(n-1)}\mathcal{H}_x^{(i)} \cos\theta^{(i)} = -\mathcal{E}_+^{(n-1)} \cos\theta^{(i)} && (3.4.34a)\\
\mathcal{E}_z^{(i)} &= Z^{(n-1)}\mathcal{H}_x^{(i)} \sin\theta^{(i)} = \mathcal{E}_+^{(n-1)} \sin\theta^{(i)} && (3.4.34b)\\
\mathcal{E}_y^{(r)} &= -Z^{(n-1)}\mathcal{H}_x^{(r)} \cos\theta^{(i)} = \mathcal{E}_-^{(n-1)} \cos\theta^{(i)} && (3.4.34c)\\
\mathcal{E}_z^{(r)} &= Z^{(n-1)}\mathcal{H}_x^{(r)} \sin\theta^{(i)} = \mathcal{E}_-^{(n-1)} \sin\theta^{(i)} && (3.4.34d)\\
\mathcal{E}_y^{(t)} &= -Z^{(n)}\mathcal{H}_x^{(t)} \cos\theta^{(t)} = -\mathcal{E}_+^{(n)} \cos\theta^{(t)} && (3.4.34e)\\
\mathcal{E}_z^{(t)} &= Z^{(n)}\mathcal{H}_x^{(t)} \sin\theta^{(t)} = \mathcal{E}_+^{(n)} \sin\theta^{(t)} && (3.4.34f)
\end{aligned}$$

3.4.2 Komplexní materiálové parametry $\varepsilon^{(n)}$ a $\mu^{(n)}$

Postup uvedený v předešlém odstavci lze rozšířit na homogenní vrstvy charakterizované komplexními materiálovými parametry $\varepsilon^{(n)}$ a $\mu^{(n)}$. Problém reálných $\varepsilon^{(n)}$ a $\mu^{(n)}$ je pak zahrnut jako speciální případ. Rovnici (3.4.2) nutno zobecnit. Řešením vlnové rovnice v (nekonečně rozlehlém) prostředí charakterizovaném komplexními $\varepsilon^{(n)}$ a $\mu^{(n)}$ jsou opět rovinné vlny jako v případě reálných $\varepsilon^{(n)}$ a $\mu^{(n)}$. Jejich šíření nyní charakterizuje komplexní index lomu $N^{(n)}$

$$N^{(n)} = \left(\kappa_e^{(n)}\kappa_m^{(n)}\right)^{1/2}\,. \tag{3.4.35}$$

Například pro elektrické pole TE vlny v naší konfiguraci

$$E_x = E_{x0} \exp\left\{\mathrm{i}\left[\omega t - \frac{\omega}{c}\left(N_y y + N_z^{(n)} z\right)\right]\right\} \tag{3.4.36}$$

kde

$$N_y^2 + N_z^{(n)2} \;=\; N^{(n)2}\,. \tag{3.4.37}$$

Použijeme stručný zápis podle rovnic (3.4.19) zobecněný na komplexní parametry

$$Z^{(n)} = \left(Y^{(n)}\right)^{-1} = \left(\frac{\mu^{(n)}}{\varepsilon^{(n)}}\right)^{1/2} \tag{3.4.38a}$$

$$\beta^{(n)} = k_0 N_z^{(n)} d^{(n)}\,. \tag{3.4.38b}$$

Pro TE vlnu dostaneme z rovnice (3.2.42) užitím rovnic (3.4.35) a (3.4.37) zobecnění rovnic (3.4.4)

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}_x^{(n)}(z)}{\mathrm{d}z^2} + k_0^2 N_z^{(n)2}\, \mathcal{E}_x^{(n)}(z) \;=\; 0\,. \tag{3.4.39a}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{H}_y^{(n)}(z)}{\mathrm{d}z^2} + k_0^2 N_z^{(n)2}\ \mathcal{H}_y^{(n)}(z) \quad = \quad 0\,. \tag{3.4.39b}$$

Řešení těchto rovnic splňující dvojici vázaných diferenciálních rovnice prvního řádu (3.2.37) zapíšeme jako zobecnění rovnic (3.4.4)

$$\mathcal{E}_x^{(n)}(z) \quad = \quad A^{(n)}\cos\left[k_0 N_z^{(n)}\left(z - z^{(n-1)}\right)\right] + B^{(n)}\sin\left[k_0 N_z^{(n)}\left(z - z^{(n-1)}\right)\right]\,, \tag{3.4.40a}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_y^{(n)}(z) \quad &= \quad \mathrm{j}\left(\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}\right)^{1/2}\frac{N_z^{(n)}}{\kappa_m^{(n)}} \\ &\times \quad \left\{B^{(n)}\cos\left[k_0 N_z^{(n)}\left(z - z^{(n-1)}\right)\right] - A^{(n)}\sin\left[k_0 N_z^{(n)}\left(z - z^{(n-1)}\right)\right]\right\}\,.\end{aligned} \tag{3.4.40b}$$

Analogicky jako v rovnici (3.4.6) zvolíme konstanty $A^{(n)}$ a $B^{(n)}$ tak, aby v rovině $z = z^{(n-1)}$ bylo splněno

$$\mathcal{E}_x^{(n)}\left(z^{(n-1)}\right) \quad = \quad A^{(n)}\,, \tag{3.4.41a}$$

$$\mathcal{H}_y^{(n)}\left(z^{(n-1)}\right) \quad = \quad \mathrm{j}\left(\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}\right)^{1/2}\frac{N_z^{(n)}}{\kappa_m^{(n)}}B^{(n)}\,. \tag{3.4.41b}$$

neboli

$$A^{(n)} \quad = \quad \mathcal{E}_x^{(n)}\left(z^{(n-1)}\right)\,, \tag{3.4.42a}$$

$$B^{(n)} \quad = \quad -\mathrm{j}\left(\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}\right)^{1/2}\frac{\kappa_m^{(n)}}{N_z^{(n)}}\ \ \mathcal{H}_y^{(n)}\left(z^{(n-1)}\right)\,. \tag{3.4.42b}$$

Partikulární řešení dostávají tvar

$${}^{(I)}\mathcal{E}_x^{(n)}\left(z - z^{(n-1)}\right) \quad = \quad -\mathrm{j}\left(\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}\right)^{1/2}\frac{\kappa_m^{(n)}}{N_z^{(n)}}\ \ \mathcal{H}_y^{(n)}\left(z^{(n-1)}\right)\sin\left[k_0 N_z^{(n)}\left(z - z^{(n-1)}\right)\right]\,, \tag{3.4.43a}$$

$${}^{(I)}\mathcal{H}_y^{(n)}\left(z - z^{(n-1)}\right) \quad = \quad \mathcal{H}_y^{(n)}\left(z^{(n-1)}\right)\cos\left[k_0 N_z^{(n)}\left(z - z^{(n-1)}\right)\right]\,, \tag{3.4.43b}$$

$${}^{(II)}\mathcal{E}_x^{(n)}\left(z - z^{(n-1)}\right) \quad = \quad \mathcal{E}_x^{(n)}\left(z^{(n-1)}\right)\cos\left[k_0 N_z^{(n)}\left(z - z^{(n-1)}\right)\right]\,, \tag{3.4.43c}$$

$${}^{(II)}\mathcal{H}_y^{(n)}\left(z - z^{(n-1)}\right) \quad = \quad -\mathrm{j}\left(\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}\right)^{1/2}\frac{N_z^{(n)}}{\kappa_m^{(n)}}\ \ \mathcal{E}_x^{(n)}\left(z^{(n-1)}\right)\sin\left[k_0 N_z^{(n)}\left(z - z^{(n-1)}\right)\right]\,, \tag{3.4.43d}$$

který je zobecněním rovnic (3.4.9). Do rovnic (3.4.40) dosadíme za konstanty $A^{(n)}$ a $B^{(n)}$ podle rovnic (3.4.42),

$$\begin{aligned}
&\mathcal{E}_x^{(n)}(z) \\
&\quad = \mathcal{E}_x^{(n)}\left(z^{(n-1)}\right)\cos\left[k_0 N_z^{(n)}\left(z - z^{(n-1)}\right)\right] \\
&\qquad -\mathrm{j}\,\mathcal{H}_y^{(n)}\left(z^{(n-1)}\right)\frac{\kappa_m^{(n)}}{N_z^{(n)}}\left(\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}\right)^{1/2}\sin\left[k_0 N_z^{(n)}\left(z - z^{(n-1)}\right)\right] ,
\end{aligned} \tag{3.4.44a}$$

$$\begin{aligned}
&\mathcal{H}_y^{(n)}(z) \\
&\quad = -\mathrm{j}\,\mathcal{E}_x^{(n)}\left(z^{(n-1)}\right)\frac{N_z^{(n)}}{\kappa_m^{(n)}}\left(\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}\right)^{1/2}\sin\left[k_0 N_z^{(n)}\left(z - z^{(n-1)}\right)\cos\theta^{(n)}\right] \\
&\qquad + \mathcal{H}_y^{(n)}\left(z^{(n-1)}\right)\cos\left[k_0 N_z^{(n)}\left(z - z^{(n-1)}\right)\cos\theta^{(n)}\right] .
\end{aligned} \tag{3.4.44b}$$

Vztahy mezi vektory pole v rovinách $z = z^{(n-1)}$ a $z = z^{(n)}$ ve vzájemné vzdálenosti $d^{(n)}$ a tedy vymezujících vrstvu n, podobně jako v rovnici (3.4.11) zapíšeme v maticovém tvaru. S označením podle rovnic (3.4.19) pro zobecnění rovnice (3.4.11) máme

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} \mathcal{E}_x^{(n)}\left(z^{(n)}\right) \\ \mathcal{H}_y^{(n)}\left(z^{(n)}\right) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\beta^{(n)} & -\mathrm{j}\left(\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}\right)^{1/2}\frac{\kappa_m^{(n)}}{N_z^{(n)}}\sin\beta^{(n)} \\ -\mathrm{j}\left(\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}\right)^{1/2}\frac{N_z^{(n)}}{\kappa_m^{(n)}}\sin\beta^{(n)} & \cos\beta^{(n)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathcal{E}_x^{(n)}\left(z^{(n-1)}\right) \\ \mathcal{H}_y^{(n)}\left(z^{(n-1)}\right) \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{3.4.45}$$

Ke kaskádnímu uspořádání vrstev do multivrstvy je vyhodnější obrácená relace analogická rovnici (3.4.12)

$$\begin{pmatrix} \mathcal{E}_x^{(n)}\left(z^{(n-1)}\right) \\ \mathcal{H}_y^{(n)}\left(z^{(n-1)}\right) \end{pmatrix} = {}^{\mathrm{TE}}\mathbf{S}^{(n)}\left(d^{(n)}\right)\begin{pmatrix} \mathcal{E}_x^{(n)}\left(z^{(n)}\right) \\ \mathcal{H}_y^{(n)}\left(z^{(n)}\right) \end{pmatrix} \tag{3.4.46}$$

Charakteristická matice ${}^{\mathrm{TE}}\mathbf{S}$ váže vektory pole na předním rozhraní $z = z^{(n-1)}$ s vektory pole na zadním rozhraní $z = z^{(n)}$. Získáme ji jako matici inverzní k matici 2×2 vystupující v rovnici (3.4.45)

$$\begin{aligned}
&{}^{\mathrm{TE}}\mathbf{S}^{(n)}\left(d^{(n)}\right) \\
&= \begin{pmatrix} \cos\beta^{(n)} & \mathrm{j}\left(\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}\right)^{1/2}\frac{\kappa_m^{(n)}}{N_z^{(n)}}\sin\beta^{(n)} \\ \mathrm{j}\left(\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}\right)^{1/2}\frac{N_z^{(n)}}{\kappa_m^{(n)}}\sin\beta^{(n)} & \cos\beta^{(n)} \end{pmatrix} ,
\end{aligned} \tag{3.4.47}$$

což je zobecnění rovnice (3.4.13).

Charakteristickou matici homogenní vrstvy pro TM polarizaci získáme z dualitní transformace, tj. záměnou $\mu_0\kappa_m^{(n)} \leftrightarrow \varepsilon_0\kappa_e^{(n)}$, podobně jako rovnici (3.4.14)

$$
\begin{aligned}
&{}^{\mathrm{TM}}\mathbf{S}\left(d^{(n)}\right) \\
&= \begin{pmatrix} \cos\beta^{(n)} & \mathrm{j}\left(\dfrac{\varepsilon_0}{\mu_0}\right)^{1/2} \dfrac{N_z^{(n)}}{\kappa_e^{(n)}}\sin\beta^{(n)} \\ \mathrm{j}\left(\dfrac{\mu_0}{\varepsilon_0}\right)^{1/2} \dfrac{\kappa_e^{(n)}}{N_z^{(n)}}\sin\beta^{(n)} & \cos\beta^{(n)} \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{3.4.48}
$$

Tomu odpovídá záměna polí vázaných dualitou $\mathcal{E}_x \rightarrow \mathcal{H}_x$ a $\mathcal{H}_x \rightarrow -\mathcal{E}_y$

$$
\begin{pmatrix} \mathcal{H}_x^{(n)}\left(z^{(n-1)}\right) \\ -\mathcal{E}_y^{(n)}\left(z^{(n-1)}\right) \end{pmatrix} = {}^{\mathrm{TM}}\mathbf{S}^{(n)}\left(d^{(n)}\right) \begin{pmatrix} \mathcal{H}_x^{(n)}\left(z^{(n)}\right) \\ -\mathcal{E}_y^{(n)}\left(z^{(n)}\right) \end{pmatrix}
\tag{3.4.49}
$$

formálně odpovídající rovnici (3.4.15)

Úplnou charakteristickou matici vrstvy o rozměru 4×4 můžeme zapsat

$$
\mathbf{S}\left(d^{(n)}\right) = \begin{pmatrix} {}^{\mathrm{TE}}\mathbf{S}\left(d^{(n)}\right) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}^{\mathrm{TM}}\mathbf{S}\left(d^{(n)}\right) \end{pmatrix},
\tag{3.4.50}
$$

kde nediagonální bloky 2×2 tvoří nulové matice $\mathbf{0}$. Charakteristická matice homogenní vrstvy je nezávislá na souřadnici z. Individuální vrstvy pak můžeme v libovolném pořadí sestavit do kaskád (multivrstev). Rovnice (3.4.12) a (3.4.15) můžeme vyjádřit jedinou formálně stejně jako v rovnici (3.4.17)

$$
\begin{pmatrix} \mathcal{E}_x^{(n)}\left(z^{(n-1)}\right) \\ \mathcal{H}_y^{(n)}\left(z^{(n-1)}\right) \\ \mathcal{H}_x^{(n)}\left(z^{(n-1)}\right) \\ -\mathcal{E}_y^{(n)}\left(z^{(n-1)}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^{\mathrm{TE}}\mathbf{S}\left(d^{(n)}\right) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}^{\mathrm{TM}}\mathbf{S}\left(d^{(n)}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{E}_x^{(n)}\left(z^{(n)}\right) \\ \mathcal{H}_y^{(n)}\left(z^{(n)}\right) \\ \mathcal{H}_x^{(n)}\left(z^{(n)}\right) \\ -\mathcal{E}_y^{(n)}\left(z^{(n)}\right) \end{pmatrix}
\tag{3.4.51}
$$

Podobně jako matice (3.4.13) a (3.4.14) lze i matice (3.4.47) a (3.4.48) diagonalizovat

$$
\begin{aligned}
{}^{\mathrm{TE}}\mathbf{S}^{(n)}\left(d^{(n)}\right) &= \begin{pmatrix} \cos\beta^{(n)} & \mathrm{j}\left(Y_0\dfrac{N_z^{(n)}}{\kappa_m^{(n)}}\right)^{-1}\sin\beta^{(n)} \\ \mathrm{j}\left(Y_0\dfrac{N_z^{(n)}}{\kappa_m^{(n)}}\right)\sin\beta^{(n)} & \cos\beta^{(n)} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \left(Y_0\dfrac{N_z^{(n)}}{\kappa_m^{(n)}}\right) & -\left(Y_0\dfrac{N_z^{(n)}}{\kappa_m^{(n)}}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \exp\left(\mathrm{j}\beta^{(n)}\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(-\mathrm{j}\beta^{(n)}\right) \end{pmatrix} \\
&\quad \times \left(2Y_0\dfrac{N_z^{(n)}}{\kappa_m^{(n)}}\right)^{-1} \begin{pmatrix} \left(Y_0\dfrac{N_z^{(n)}}{\kappa_m^{(n)}}\right) & 1 \\ \left(Y_0\dfrac{N_z^{(n)}}{\kappa_m^{(n)}}\right) & -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{3.4.52a}
$$

$$
{}^{\mathrm{TM}}\mathbf{S}^{(n)}\left(d^{(n)}\right) = \begin{pmatrix} \cos\beta^{(n)} & \mathrm{j}\left(Z_0\dfrac{N_z^{(n)}}{\kappa_e^{(n)}}\right)^{-1}\sin\beta^{(n)} \\ \mathrm{j}\left(Z_0\dfrac{N_z^{(n)}}{\kappa_e^{(n)}}\right)\sin\beta^{(n)} & \cos\beta^{(n)} \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \left(Z_0\dfrac{N_z^{(n)}}{\kappa_e^{(n)}}\right) & -\left(Z_0\dfrac{N_z^{(n)}}{\kappa_e^{(n)}}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \exp\left(\mathrm{j}\beta^{(n)}\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(-\mathrm{j}\beta^{(n)}\right) \end{pmatrix} \tag{3.4.52b}
$$

$$
\times \left(2Z_0\frac{N_z^{(n)}}{\kappa_e^{(n)}}\right)^{-1} \begin{pmatrix} \left(Z_0\dfrac{N_z^{(n)}}{\kappa_e^{(n)}}\right) & 1 \\ \left(Z_0\dfrac{N_z^{(n)}}{\kappa_e^{(n)}}\right) & -1 \end{pmatrix}
$$

Matice vystupující na pravých stranách těchto rovnic a nezávislé na tloušťce vrstvy $d^{(n)}$ (zahrnuté v parametru $\beta^{(n)}$) splňují

$$
\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \left(Y_0\dfrac{N_z^{(n)}}{\kappa_m^{(n)}}\right) & -\left(Y_0\dfrac{N_z^{(n)}}{\kappa_m^{(n)}}\right) \end{pmatrix}^{-1} =
\left(2Y_0\frac{N_z^{(n)}}{\kappa_m^{(n)}}\right)^{-1} \begin{pmatrix} \left(Y_0\dfrac{N_z^{(n)}}{\kappa_m^{(n)}}\right) & 1 \\ \left(Y_0\dfrac{N_z^{(n)}}{\kappa_m^{(n)}}\right) & -1 \end{pmatrix} \tag{3.4.53a}
$$

$$
\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \left(Z_0\dfrac{N_z^{(n)}}{\kappa_e^{(n)}}\right) & -\left(Z_0\dfrac{N_z^{(n)}}{\kappa_e^{(n)}}\right) \end{pmatrix}^{-1} =
\left(2Z_0\frac{N_z^{(n)}}{\kappa_e^{(n)}}\right)^{-1} \begin{pmatrix} \left(Z_0\dfrac{N_z^{(n)}}{\kappa_e^{(n)}}\right) & 1 \\ \left(Z_0\dfrac{N_z^{(n)}}{\kappa_e^{(n)}}\right) & -1 \end{pmatrix} \tag{3.4.53b}
$$

Jsou nezávislé na tloušťce $d^{(n)}$ a charakterizují levé resp. pravé rozhraní vrstvy.

3.5 Materiálové parametry $\kappa_e(z)$ a $\kappa_m(z)$ jako funkce z

V odst. 3.1 jsme získali soustavu vázaných rovnic (3.2.37) pro TE polarizaci resp. soustavu vázaných rovnic (3.2.46) pro TM polarizaci, tj.

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_x(z)}{\mathrm{d}z} = -\mathrm{j}k_0\left(\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}\right)^{1/2}\kappa_m(z)\,\mathcal{H}_y(z)\ , \tag{3.5.1a}$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{H}_y(z)}{\mathrm{d}z} = -\mathrm{j}k_0\left(\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}\right)^{1/2}\left[\kappa_e(z)-\frac{N_y^2}{\kappa_m(z)}\right]\mathcal{E}_x(z)\ . \tag{3.5.1b}$$

resp.

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{H}_x(z)}{\mathrm{d}z} = \mathrm{j}k_0\left(\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}\right)^{1/2}\kappa_e(z)\,\mathcal{E}_y(z)\ , \tag{3.5.2a}$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_y(z)}{\mathrm{d}z} = \mathrm{j}k_0\left(\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}\right)^{1/2}\left[\kappa_m(z)-\frac{N_y^2}{\kappa_e(z)}\right]\mathcal{H}_x(z)\ . \tag{3.5.2b}$$

Pro jednoduchost se soustředíme na případ, kdy jak $\kappa_e(z)$ tak i $\kappa_m(z)$ jsou reálnými funkcemi osové souřadnice z. Z těchto vázaných diferenciálních rovnic prvního řádu jsme dostali rovnice druhého řádu (3.2.42) zvlášť pro složku pole $\mathcal{E}_x$ a zvlášť pro složku pole $\mathcal{H}_y$ v případě polarizace TE, resp. rovnice (3.2.48) pro složku pole $\mathcal{H}_x$ a zvlášť pro složku pole $\mathcal{E}_y$ v případě polarizace TM

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}_x(z)}{\mathrm{d}z^2}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\ln\kappa_m(z)\right]\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_x(z)}{\mathrm{d}z}+k_0^2\left[\kappa_e(z)\,\kappa_m(z)-N_y^2\right]\mathcal{E}_x(z) = 0 \tag{3.5.3a}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{H}_y(z)}{\mathrm{d}z^2}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left\{\ln\left[\kappa_e(z)-\frac{N_y^2}{\kappa_m(z)}\right]\right\}\frac{\mathrm{d}\mathcal{H}_y(z)}{\mathrm{d}z}+k_0^2\left[\kappa_e(z)\,\kappa_m(z)-N_y^2\right]\mathcal{H}_y(z) = 0\,. \tag{3.5.3b}$$

resp.

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{H}_x(z)}{\mathrm{d}z^2}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\ln\kappa_e(z)\right]\frac{\mathrm{d}\mathcal{H}_x(z)}{\mathrm{d}z}+k_0^2\left[\kappa_e(z)\,\kappa_m(z)-N_y^2\right]\mathcal{H}_x(z) = 0 \tag{3.5.4a}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}_y(z)}{\mathrm{d}z^2}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left\{\ln\left[\kappa_m(z)-\frac{N_y^2}{\kappa_e(z)}\right]\right\}\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_y(z)}{\mathrm{d}z}+k_0^2\left[\kappa_e(z)\,\kappa_m(z)-N_y^2\right]\mathcal{E}_y(z) = 0\,. \tag{3.5.4b}$$

3.5.1 TE polarizace

V odst. 3.3 jsme řešení rovnic (3.2.42) pro TE polarizaci zapsali jako lineární kombinaci dvou lineárně nezávislých řešení (3.3.1)

$$\mathcal{E}_x(z) = {}^{(I)}\mathcal{E}_x(z)+{}^{(II)}\mathcal{E}_x(z)\ , \tag{3.5.5a}$$

$$\mathcal{H}_y(z) = {}^{(I)}\mathcal{H}_y(z)+{}^{(II)}\mathcal{H}_y(z)\ . \tag{3.5.5b}$$

Řešení vyjádříme pomocí počátečních amplitud ${}^{(I)}\mathcal{E}_x(0)$, ${}^{(II)}\mathcal{E}_x(0)$, ${}^{(I)}\mathcal{H}_y(0)$, ${}^{(II)}\mathcal{H}_y(0)$ a bezrozměrných funkcí ${}^{(I)}e_x(z)$, ${}^{(II)}e_x(z)$, ${}^{(I)}h_y(z)$ a ${}^{(II)}h_y(z)$

$$\begin{aligned} {}^{(I)}\mathcal{E}_x(z) &= {}^{(I)}\mathcal{E}_x(0)\ {}^{(I)}e_x(z)\ , && (3.5.6a)\\ {}^{(II)}\mathcal{E}_x(z) &= {}^{(II)}\mathcal{E}_x(0)\ {}^{(II)}e_x(z)\ , && (3.5.6b)\\ {}^{(I)}\mathcal{H}_y(z) &= {}^{(I)}\mathcal{H}_y(0)\ {}^{(I)}h_y(z)\ , && (3.5.6c)\\ {}^{(II)}\mathcal{H}_y(z) &= {}^{(II)}\mathcal{H}_y(0)\ {}^{(II)}h_y(z) && (3.5.6d) \end{aligned}$$

Po dosazení do rovnic (3.5.5)

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_x(z) &= {}^{(I)}\mathcal{E}_x(0)\ {}^{(I)}e_x(z) + {}^{(II)}\mathcal{E}_x(0)\ {}^{(II)}e_x(z)\ , && (3.5.7a)\\ \mathcal{H}_y(z) &= {}^{(I)}\mathcal{H}_y(0)\ {}^{(I)}h_y(z) + {}^{(II)}\mathcal{H}_y(0)\ {}^{(II)}h_y(z)\ . && (3.5.7b) \end{aligned}$$

V rovině $z = 0$ zvolíme

$$\begin{aligned} {}^{(I)}e_x(0) &= {}^{(II)}h_y(0) = 0 && (3.5.8a)\\ {}^{(II)}e_x(0) &= {}^{(I)}h_y(0) = 1\,. && (3.5.8b) \end{aligned}$$

Potom

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_x(0) &= {}^{(II)}\mathcal{E}_x(0)\ , && (3.5.9a)\\ \mathcal{H}_y(0) &= {}^{(I)}\mathcal{H}_y(0)\ . && (3.5.9b) \end{aligned}$$

S ohledem na rovnici (3.3.10) musí platit

$${}^{\mathrm{TE}}\mathcal{D}(z) = \det\begin{pmatrix} {}^{(I)}\mathcal{E}_x(0)\ {}^{(I)}e_x(z) & {}^{(II)}\mathcal{E}_x(0)\ {}^{(II)}e_x(z) \\ {}^{(I)}\mathcal{H}_y(0)\ {}^{(I)}h_y(z) & {}^{(II)}\mathcal{H}_y(0)\ {}^{(II)}h_y(z) \end{pmatrix} = -\ {}^{(II)}\mathcal{E}_x(0)\ \ {}^{(I)}\mathcal{H}_y(0) \qquad (3.5.10)$$

a současně

$$\det\begin{pmatrix} {}^{(I)}e_x(z) & {}^{(II)}e_x(z) \\ {}^{(I)}h_y(z) & {}^{(II)}h_y(z) \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 0 & {}^{(II)}e_x(0) \\ {}^{(I)}h_y(0) & 0 \end{pmatrix} = -1\,. \qquad (3.5.11)$$

Podmínky v rovině $z = 0$ dané rovnicemi (3.5.9) budou splněny, když v rovnici (3.5.5) položíme

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_x(z) &= \mathcal{E}_x(0)\ {}^{(II)}e_x(z) - \mathrm{j}\ \mathcal{Z}_{\mathrm{E}}(0)\,\mathcal{H}_y(0)\ \ {}^{(I)}e_x(z)\ , && (3.5.12a)\\ \mathcal{H}_y(z) &= -\mathrm{j}\ \mathcal{Y}_{\mathrm{E}}(0)\ \mathcal{E}_x(0)\ {}^{(II)}h_y(z) + \mathcal{H}_y(0)\ \ {}^{(I)}h_y(z)\ . && (3.5.12b) \end{aligned}$$

nebo v maticovém tvaru

$$\begin{pmatrix} \mathcal{E}_x(z) \\ \mathcal{H}_y(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^{(II)}e_x(z) & -\mathrm{j}\ \mathcal{Z}_{\mathrm{E}}(0)\ {}^{(I)}e_x(z) \\ -\mathrm{j}\ \mathcal{Y}_{\mathrm{E}}(0)\ {}^{(II)}h_y(z) & {}^{(I)}h_y(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{E}_x(0) \\ \mathcal{H}_y(0) \end{pmatrix},\quad (3.5.13)$$

kde $\mathcal{Z}_{\mathrm{E}}(0)$ má rozměr vlnové impedance (Ω) a $\mathcal{Y}_{\mathrm{E}}(0)$ má rozměr její převrácené hodnoty, tj. rozměr admitance (Ω^{-1}). Rovnicím (3.5.10) a (3.5.11) vyhovuje tedy volba v rovnicích (3.5.7)

$$\begin{aligned} {}^{(I)}\mathcal{E}_x(0) &= -\mathrm{j}\ \mathcal{Z}_{\mathrm{E}}(0)\ {}^{(I)}\mathcal{H}_y(0)\ , && (3.5.14a)\\ {}^{(II)}\mathcal{H}_y(0) &= -\mathrm{j}\ \mathcal{Y}_{\mathrm{E}}(0)\ {}^{(II)}\mathcal{E}_x(0)\ . && (3.5.14b) \end{aligned}$$

Rovnice (3.5.13) představuje lineární relaci mezi vektory

$$\begin{pmatrix} \mathcal{E}_x(z) \\ \mathcal{H}_y(z) \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \begin{pmatrix} \mathcal{E}_x(0) \\ \mathcal{H}_y(0) \end{pmatrix} . \tag{3.5.15}$$

Proto matice

$${}^{\mathrm{TE}}\mathbf{N}(z) = \begin{pmatrix} {}^{(II)}e_x(z) & -\mathrm{j}\,\mathcal{Z}_{\mathrm{E}}(0)\;{}^{(I)}e_x(z) \\ -\mathrm{j}\,\mathcal{Y}_{\mathrm{E}}(0)\;{}^{(II)}h_y(z) & {}^{(I)}h_y(z) \end{pmatrix} \tag{3.5.16}$$

je nezávislá na amplitudách polí. Její determinant je v $z = 0$ roven jedné vzhledem k rovnici (3.5.8) a je nezávislý na z. Získali jsem maticový vztah mezi elektrickým a magnetickým polem TE vln v rovině $z = 0$ a odpovídajícím elektrickým a magnetickým polem těchto TE vln v obecné rovině z. Při praktickém uplatnění maticového formalizmu bude výhodnější vyjádřit $\mathcal{E}_x(0)$ a $\mathcal{H}_y(0)$ jako funkce $\mathcal{E}_x(z)$ a $\mathcal{H}_y(z)$. K tomu zjistíme matici ${}^{\mathrm{TE}}\mathbf{S}(z)$ inverzní k ${}^{\mathrm{TE}}\mathbf{N}(z)$

$${}^{\mathrm{TE}}\mathbf{S}(z) \;=\; \left[{}^{\mathrm{TE}}\mathbf{N}(z)\right]^{-1} = \begin{pmatrix} {}^{(I)}h_y(z) & \mathrm{j}\,\mathcal{Z}_{\mathrm{E}}(0)\;{}^{(I)}e_x(z) \\ \mathrm{j}\,\mathcal{Y}_{\mathrm{E}}(0)\;{}^{(II)}h_y(z) & {}^{(II)}e_x(z) \end{pmatrix} \tag{3.5.17}$$

Matice ${}^{\mathrm{TE}}\mathbf{S}$ má jednotkový determinant, $\det\left({}^{\mathrm{TE}}\mathbf{S}\right) = 1$. Matice ${}^{\mathrm{TE}}\mathbf{S}$ vyjadřuje funkce $\mathcal{E}_x(0)$ a $\mathcal{H}_y(0)$ v rovině $z = 0$ pomocí funkcí $\mathcal{E}_x(z)$ a $\mathcal{H}_y(z)$ charakterizujících pole v nějaké obecné rovině $z = \text{constant}$

$$\begin{pmatrix} \mathcal{E}_x(0) \\ \mathcal{H}_y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^{(I)}h_y(z) & \mathrm{j}\,\mathcal{Z}_{\mathrm{E}}(0)\;{}^{(I)}e_x(z) \\ \mathrm{j}\,\mathcal{Y}_{\mathrm{E}}(0)\;{}^{(II)}h_y(z) & {}^{(II)}e_x(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{E}_x(z) \\ \mathcal{H}_y(z) \end{pmatrix} = {}^{\mathrm{TE}}\mathbf{S}(z) \begin{pmatrix} \mathcal{E}_x(z) \\ \mathcal{H}_y(z) \end{pmatrix} \tag{3.5.18}$$

Znalost $\mathcal{E}_x(z)$ a $\mathcal{H}_y(z)$ stačí ke stanovení profilu polí monochromatické vlny ve vrstevnaté struktuře charakterizované maticí ${}^{\mathrm{TE}}\mathbf{S}(z)$. Matice ${}^{\mathrm{TE}}\mathbf{S}(z)$ se nazývá charakteristickou maticí vrstevnatého prostředí pro TE polarizaci.

3.5.2 TM polarizace

V odst. 3.3 jsme řešení rovnic (3.2.48) pro TM polarizaci zapsali jako lineární kombinaci dvou lineárně nezávislých řešení (3.3.11)

$$\mathcal{H}_x(z) \;=\; {}^{(I)}\mathcal{H}_x(z) + {}^{(II)}\mathcal{H}_x(z)\,, \tag{3.5.19a}$$

$$\mathcal{E}_y(z) \;=\; {}^{(I)}\mathcal{E}_y(z) + {}^{(II)}\mathcal{E}_y(z)\,. \tag{3.5.19b}$$

Řešení vyjádříme pomocí počátečních amplitud ${}^{(I)}\mathcal{H}_x(0)$, ${}^{(II)}\mathcal{H}_x(0)$, ${}^{(I)}\mathcal{E}_y(0)$, ${}^{(II)}\mathcal{E}_y(0)$ a bezrozměrných funkcí ${}^{(I)}h_x(z)$, ${}^{(II)}h_x(z)$, ${}^{(I)}e_y(z)$ a ${}^{(II)}e_y(z)$

$$\mathcal{H}_x(z) \;=\; {}^{(I)}\mathcal{H}_x(0)\;{}^{(I)}h_x(z) + {}^{(II)}\mathcal{H}_x(0)\;{}^{(II)}h_x(z)\,, \tag{3.5.20a}$$

$$\mathcal{E}_y(z) \;=\; {}^{(I)}\mathcal{E}_y(0)\;{}^{(I)}e_y(z) + {}^{(II)}\mathcal{E}_y(0)\;{}^{(II)}e_y(z)\,. \tag{3.5.20b}$$

V rovině $z = 0$ zvolíme ${}^{(I)}h_x(0) = {}^{(II)}e_y(0) = 0$ a ${}^{(II)}h_x(0) = {}^{(I)}e_y(0) = 1$. Potom

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_x(0) &= {}^{(II)}\mathcal{H}_x(0)\ , && (3.5.21a)\\ \mathcal{E}_y(0) &= {}^{(I)}\mathcal{E}_y(0)\ . && (3.5.21b)\end{aligned}$$

V tomto speciálním případě ($z = 0$) determinant (3.3.20) bude

$$\begin{aligned}{}^{\mathrm{TM}}\mathcal{D}(0) &= \det\begin{pmatrix} {}^{(I)}\mathcal{H}_x(0) & {}^{(I)}h_x(0) & {}^{(II)}\mathcal{H}_x(0) & {}^{(II)}h_x(0) \\ {}^{(I)}\mathcal{E}_y(0) & {}^{(I)}e_y(0) & {}^{(II)}\mathcal{E}_y(0) & {}^{(II)}e_y(0)\end{pmatrix}\\ &= \det\begin{pmatrix} 0 & {}^{(II)}\mathcal{H}_x(0) \\ {}^{(I)}\mathcal{E}_y(0) & 0\end{pmatrix} = -\ {}^{(II)}\mathcal{H}_x(0)\ \ {}^{(I)}\mathcal{E}_y(0) \quad (3.5.22)\end{aligned}$$

S ohledem na rovnici (3.3.20) musí platit

$${}^{\mathrm{TM}}\mathcal{D}(z) = \det\begin{pmatrix} {}^{(I)}\mathcal{H}_x(0) & {}^{(I)}e_x(z) & {}^{(II)}\mathcal{H}_x(0) & {}^{(II)}e_x(z) \\ {}^{(I)}\mathcal{E}_y(0) & {}^{(I)}h_y(z) & {}^{(II)}\mathcal{E}_y(0) & {}^{(II)}h_y(z)\end{pmatrix} = -\ {}^{(II)}\mathcal{H}_x(0)\ \ {}^{(I)}\mathcal{E}_y(0) \quad (3.5.23)$$

a současně

$$\det\begin{pmatrix} {}^{(I)}h_x(z) & {}^{(II)}h_x(z) \\ {}^{(I)}e_y(z) & {}^{(II)}e_y(z)\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 0 & {}^{(II)}h_x(0) \\ {}^{(I)}e_y(0) & \end{pmatrix} = -1\,. \quad (3.5.24)$$

Podmínky v rovině $z = 0$ budou splněny, když v rovnici (3.5.5) s ohledem na rovnice (3.5.21) položíme

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_x(z) &= \mathcal{H}_x(0)\ {}^{(II)}h_x(z) - \mathrm{j}\,\mathcal{Y}_{\mathrm{M}}(0)\ \mathcal{E}_y(0)\ {}^{(I)}h_x(z)\ , && (3.5.25a)\\ \mathcal{E}_y(z) &= -\mathrm{j}\,\mathcal{Z}_{\mathrm{M}}(0)\,\mathcal{H}_x(0)\ {}^{(II)}e_y(z) + \mathcal{E}_y(0)\ {}^{(I)}e_y(z)\ . && (3.5.25b)\end{aligned}$$

nebo v maticovém tvaru

$$\begin{pmatrix}\mathcal{H}_x(z)\\ \mathcal{E}_y(z)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^{(II)}h_x(z) & -\mathrm{j}\,\mathcal{Y}_{\mathrm{M}}(0)\ {}^{(I)}h_x(z) \\ -\mathrm{j}\,\mathcal{Z}_{\mathrm{M}}(0)\ {}^{(II)}e_y(z) & {}^{(I)}e_y(z)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathcal{H}_x(0)\\ \mathcal{E}_y(0)\end{pmatrix}, \quad (3.5.26)$$

kde $\mathcal{Y}_{\mathrm{M}}(0)$ má rozměr vlnové admitance (Ω^{-1}) a $\mathcal{Z}_{\mathrm{M}}(0)$ má rozměr vlnové impedancew (Ω) Jedná se o je lineární relaci mezi vektory

$$\begin{pmatrix}\mathcal{H}_x(z)\\ \mathcal{E}_y(z)\end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \begin{pmatrix}\mathcal{H}_x(0)\\ \mathcal{E}_y(0)\end{pmatrix}. \quad (3.5.27)$$

Proto matice

$${}^{\mathrm{TM}}\mathbf{N}(z) = \begin{pmatrix} {}^{(II)}h_x(z) & -\mathrm{j}\mathcal{Y}_{\mathrm{M}}(0)\ {}^{(I)}e_x(z) \\ -\mathrm{j}\mathcal{Z}_{\mathrm{M}}(0)\ {}^{(II)}h_y(z) & {}^{(I)}h_y(z)\end{pmatrix} \quad (3.5.28)$$

je nezávislá na amplitudách polí. Získali jsem maticový vztah mezi elektrickým a magnetickým polem TM vln v rovině $z = 0$ a odpovídajícím elektrickým a magnetickým polem těchto TM vln v obecné rovině z. Při praktickém uplatnění maticového formalizmu bude výhodnější vyjádřit $\mathcal{H}_x(0)$ a $\mathcal{E}_y(0)$ jako funkce $\mathcal{H}_x(z)$ a $\mathcal{E}_y(z)$. K tomu zjistíme matici ${}^{\mathrm{TM}}\mathbf{S}(z)$ inverzní k ${}^{\mathrm{TM}}\mathbf{N}(z)$

$$ {}^{\mathrm{TM}}\mathbf{S}(z) = \left[{}^{\mathrm{TM}}\mathbf{N}(z)\right]^{-1} = \begin{pmatrix} {}^{(I)}e_y(z) & \mathrm{j}\,\mathcal{Y}_{\mathrm{M}}(0)\ {}^{(I)}h_x(z) \\ \mathrm{j}\,\mathcal{Z}_{\mathrm{M}}(0)\ {}^{(II)}e_y(z) & {}^{(II)}h_x(z) \end{pmatrix} \tag{3.5.29} $$

Matice ${}^{\mathrm{TM}}\mathbf{S}$ má jednotkový determinant, $\det\left({}^{\mathrm{TM}}\mathbf{S}\right) = 1$. Matice ${}^{\mathrm{TM}}\mathbf{S}$ vyjadřuje funkce $\mathcal{H}_x(0)$ a $\mathcal{E}_y(0)$ v rovině $z = 0$ pomocí funkcí $\mathcal{H}_x(z)$ a $\mathcal{E}_y(z)$ charakterizujících pole v nějaké obecné rovině $z = \mathrm{constant}$

$$ \begin{pmatrix} \mathcal{H}_x(0) \\ \mathcal{E}_y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^{(I)}e_y(z) & \mathrm{j}\,\mathcal{Y}_{\mathrm{M}}(0)\ {}^{(I)}h_x(z) \\ \mathrm{j}\,\mathcal{Z}_{\mathrm{M}}(0)\ {}^{(II)}e_y(z) & {}^{(II)}h_x(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{H}_x(z) \\ \mathcal{E}_y(z) \end{pmatrix} = {}^{\mathrm{TM}}\mathbf{S}(z) \begin{pmatrix} \mathcal{H}_x(z) \\ \mathcal{E}_y(z) \end{pmatrix} \tag{3.5.30} $$

Znalost $\mathcal{H}_x(z)$ a $\mathcal{E}_y(z)$ stačí ke stanovení profilu polí monochromatické vlny ve vrstevnaté struktuře charakterizované maticí ${}^{\mathrm{TM}}\mathbf{S}(z)$. Matice ${}^{\mathrm{TM}}\mathbf{S}(z)$ se nazývá charakteristickou maticí vrstevnatého prostředí pro TM polarizaci.

Dosud jsme nevyužili dualitní transformaci. Pokud máme k dispozici vztah pro charakteristickou matici pro TE polarizaci daný rovnicí (3.5.18)

$$ \begin{pmatrix} \mathcal{E}_x(0) \\ \mathcal{H}_y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^{(I)}h_y(z) & \mathrm{j}\,\mathcal{Z}_{\mathrm{E}}(0)\ {}^{(I)}e_x(z) \\ \mathrm{j}\,\mathcal{Y}_{\mathrm{E}}(0)\ {}^{(II)}h_y(z) & {}^{(II)}e_x(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{E}_x(z) \\ \mathcal{H}_y(z) \end{pmatrix} = {}^{\mathrm{TE}}\mathbf{S}(z) \begin{pmatrix} \mathcal{E}_x(z) \\ \mathcal{H}_y(z) \end{pmatrix}. \tag{3.5.31} $$

užitím dualitní transformace dostaneme

$$ \begin{pmatrix} \mathcal{H}_x(0) \\ -\mathcal{E}_y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^{(I)}h_y(z) & \mathrm{j}\,\mathcal{Y}_{\mathrm{M}}(0)\ {}^{(I)}e_x(z) \\ \mathrm{j}\,\mathcal{Z}_{\mathrm{M}}(0)\ {}^{(II)}h_y(z) & {}^{(II)}e_x(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{H}_x(z) \\ -\mathcal{E}_y(z) \end{pmatrix} = {}^{\mathrm{TM}}\mathbf{S}(z) \begin{pmatrix} \mathcal{H}_x(z) \\ -\mathcal{E}_y(z) \end{pmatrix} \tag{3.5.32} $$

Jak bylo uvedeno výše, rovnice (3.5.31) a (3.5.32) vyjadřují lineární vztah mezi amplitudami polí. Proto matice ${}^{\mathrm{TE}}\mathbf{S}(z)$ a ${}^{\mathrm{TM}}\mathbf{S}(z)$ jsou na těchto amplitudách nezávislé. Z dualitní transformace se uplatní jen záměna $\varepsilon(z) \leftrightarrow \mu(z)$.

3.5.3 Kolmý dopad

Při kolmém dopadu je $N_y = 0$. TE polarizace a TM polarizace odpovídají fyzikálně stejným situacím avšak vyjádřeným v odlišných souřadných systémech se společnou osou z. V odst. 3.1 jsme získali soustavu vázaných rovnic (3.2.37) pro TE polarizaci resp. soustavu vázaných rovnic (3.2.46) pro TM polarizaci. Po dosazení $N_y = 0$ se tyto rovnice zredukují na

$$ \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_x(z)}{\mathrm{d}z} = -\mathrm{j}k_0 \left(\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}\right)^{1/2} \kappa_m(z)\,\mathcal{H}_y(z)\,, \tag{3.5.33a} $$

$$ \frac{\mathrm{d}\mathcal{H}_y(z)}{\mathrm{d}z} = -\mathrm{j}k_0 \left(\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}\right)^{1/2} [\kappa_e(z)]\,\mathcal{E}_x(z)\,. \tag{3.5.33b} $$

resp.

$$ \frac{\mathrm{d}\mathcal{H}_x(z)}{\mathrm{d}z} = \mathrm{j}k_0 \left(\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}\right)^{1/2} \kappa_e(z)\,\mathcal{E}_y(z)\,, \tag{3.5.34a} $$

$$ \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_y(z)}{\mathrm{d}z} = \mathrm{j}k_0 \left(\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}\right)^{1/2} [\kappa_m(z)]\,\mathcal{H}_x(z)\,. \tag{3.5.34b} $$

Pro jednoduchost se soustředíme na případ, kdy jak $\kappa_e(z)$ tak i $\kappa_m(z)$ jsou reálnými funkcemi osové souřadnice z. Z těchto vázaných diferenciálních rovnic prvního řádu dostáváme dva páry formálně stejných rovnic druhého řádu

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}_x(z)}{\mathrm{d}z^2} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\ln\kappa_m(z)\right]\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_x(z)}{\mathrm{d}z} + k_0^2\left[\kappa_e(z)\,\kappa_m(z)\right]\mathcal{E}_x(z) = 0\,. \tag{3.5.35a}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{H}_y(z)}{\mathrm{d}z^2} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left\{\ln\left[\kappa_e(z)\right]\right\}\frac{\mathrm{d}\mathcal{H}_y(z)}{\mathrm{d}z} + k_0^2\left[\kappa_e(z)\,\kappa_m(z)\right]\mathcal{H}_y(z) = 0\,. \tag{3.5.35b}$$

resp.

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{H}_x(z)}{\mathrm{d}z^2} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\ln\kappa_e(z)\right]\frac{\mathrm{d}\mathcal{H}_x(z)}{\mathrm{d}z} + k_0^2\left[\kappa_e(z)\,\kappa_m(z)\right]\mathcal{H}_x(z) = 0 \tag{3.5.36a}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}_y(z)}{\mathrm{d}z^2} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left\{\ln\left[\kappa_m(z)\right]\right\}\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_y(z)}{\mathrm{d}z} + k_0^2\left[\kappa_e(z)\,\kappa_m(z)\right]\mathcal{E}_y(z) = 0\,. \tag{3.5.36b}$$

V prostředích s konstantní magnetickou permeabilitou

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\kappa_m(z) = 0$$

se vlnové rovnice pro elektrická pole zjednoduší na

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}_x(z)}{\mathrm{d}z^2} + k_0^2\left[\kappa_e(z)\,\kappa_m(z)\right]\mathcal{E}_x(z) = 0\,. \tag{3.5.37a}$$

resp.

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}_y(z)}{\mathrm{d}z^2} + k_0^2\left[\kappa_e(z)\,\kappa_m(z)\right]\mathcal{E}_y(z) = 0\,. \tag{3.5.37b}$$

3.6 Lineární diferenciální rovnice druhého řádu

Bylo by užitečné zjistit profily takové $\kappa_m(z)$ a $\kappa_m(z)$, které mají praktické uplatnění a současně dovolují snadné řešení těchto diferenciálních rovnic. Pokud lze logaritmické derivace obsahující materiálové parametry vypočítat, představují rovnice (3.2.42) resp. (3.2.48) obyčejné lineární homogenní diferenciální rovnice druhého řádu bez pravé strany typu

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{W}(z)}{\mathrm{d}z^2} + P(z)\frac{\mathrm{d}\mathcal{W}(z)}{\mathrm{d}z} + Q(z)\,\mathcal{W}(z) = 0\,. \tag{3.6.1}$$

K rovnici tohoto typu vede po separaci proměnných řada fyzikálních úloh charakterizovaných parciálními diferenciálními rovnicemi. K nim patři i zde uvažované časově závislé vlnové rovnice (3.1.9) a (3.1.15) a z nich pro monochromatické řešení o frekvenci ω plynoucí časově nezávislé vlnové rovnice (též rovnice Helmholtzovy)

$$\begin{aligned} \nabla^2 \boldsymbol{E} + \omega^2 \varepsilon\mu \boldsymbol{E} + \nabla(\ln\mu) \times (\nabla \times \boldsymbol{E}) + \nabla\left[\boldsymbol{E}\cdot\nabla(\ln\varepsilon)\right] &= 0\,, \quad (3.6.2a) \\ \nabla^2 \boldsymbol{H} + \omega^2 \varepsilon\mu \boldsymbol{H} + \nabla(\ln\varepsilon) \times (\nabla \times \boldsymbol{H}) + \nabla\left[\boldsymbol{H}\cdot\nabla(\ln\mu)\right] &= 0\,. \quad (3.6.2b) \end{aligned}$$

Připomeňme ty poznatky týkající se rovnice (3.6.1), které pro nás mají význam [3].Její řešení je dané vlastnostmi funkcí $P(z)$ a $Q(z)$. Pokud funkce $P(z)$ a $Q(z)$ zůstávají konečné v nějakém konečném bodě $z = z_0$, označujeme takový bod z_0 jako *ordinární*. Pokud funkce $P(z)$ a $Q(z)$ jdou do nekonečna (divergují), když $z \to z_0$, označujeme takový konečný bod z_0 jako *singulární*. Rozeznáváme dva typy konečných singulárních bodů.

(1) Pokud $P(z)$ a $Q(z)$ jdou do nekonečna (divergují) při $z \to z_0$, avšak $(z - z_0)\,P(z)$ a $(z - z_0)^2\,Q(z)$ zůstávají při $z \to z_0$ konečné, označujeme takový konečný bod z_0 jako *regulárně singulární* (nebo také jako nepodstatnou singularitu).

(2) Pokud $P(z)$ a $Q(z)$ jdou do nekonečna (divergují) při $z \to z_0$, avšak také $P(z)\,(z - z_0)$ a $(z - z_0)^2\,Q(z)$ jdou do nekonečna při $z \to z_0$ označujeme takový konečný bod z_0 jako *irregulárně singulární* (nebo také jako podstatnou singularitu).

Zbývá pro úplnost vyšetřit chování funkcí $P(z)$ a $Q(z)$, když $z \to \pm\infty$. V rovnici (3.6.1) dosadíme za z novou proměnnou $t = z^{-1}$ a hledáme limitu pro $t \to 0$. První a druhou derivaci pak vyjádříme jako

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{W}(z)}{\mathrm{d}z} = \frac{\mathrm{d}\mathcal{W}(t^{-1})}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}z} = -\frac{1}{z^2}\frac{\mathrm{d}\mathcal{W}(t^{-1})}{\mathrm{d}t} = -t^2\frac{\mathrm{d}\mathcal{W}(t^{-1})}{\mathrm{d}t} \quad (3.6.3a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^2\mathcal{W}(z)}{\mathrm{d}z^2} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\mathrm{d}\mathcal{W}(z)}{\mathrm{d}z}\right]\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}z} = -t^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[-t^2\frac{\mathrm{d}\mathcal{W}(t^{-1})}{\mathrm{d}t}\right] \\ &= -t^2\left[-2t\frac{\mathrm{d}\mathcal{W}(t^{-1})}{\mathrm{d}t} - t^2\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{W}(t^{-1})}{\mathrm{d}t^2}\right] = 2t^3\frac{\mathrm{d}\mathcal{W}(t^{-1})}{\mathrm{d}t} + t^4\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{W}(t^{-1})}{\mathrm{d}t^2} \end{aligned} \quad (3.6.3b)$$

Dosadíme tyto derivace do rovnice (3.6.1)

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{W}(z)}{\mathrm{d}z^2} + P(z)\frac{\mathrm{d}\mathcal{W}(z)}{\mathrm{d}z} + Q(z)\,\mathcal{W}(z) = 0\,. \quad (3.6.4)$$

Dostaneme

$$\begin{aligned} 2t^3\frac{\mathrm{d}\mathcal{W}(t^{-1})}{\mathrm{d}t} + t^4\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{W}(t^{-1})}{\mathrm{d}t^2} + P\left(t^{-1}\right)\left[-t^2\frac{\mathrm{d}\mathcal{W}(t^{-1})}{\mathrm{d}t}\right] + Q\left(t^{-1}\right)\mathcal{W}\left(t^{-1}\right) &= 0 \\ t^4\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{W}(t^{-1})}{\mathrm{d}t^2} + \left[2t^3 - t^2P\left(t^{-1}\right)\right]\frac{\mathrm{d}\mathcal{W}(t^{-1})}{\mathrm{d}t} + Q\left(t^{-1}\right)\mathcal{W}\left(t^{-1}\right) &= 0\,. \end{aligned}$$

Konečně po vydělení t^2 můžeme vyjádřit rovnici (3.6.1) následujícím způsobem

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{W}(t^{-1})}{\mathrm{d}t^2} + \left[\frac{2t - P(t^{-1})}{t^2}\right]\frac{\mathrm{d}\mathcal{W}(t^{-1})}{\mathrm{d}t} + \left[\frac{Q(t^{-1})}{t^4}\right]\mathcal{W}\left(t^{-1}\right) = 0 \quad (3.6.5)$$

Vyšetříme chování funkcí

$$\frac{2t - P\left(t^{-1}\right)}{t^2}\,, \qquad \frac{Q\left(t^{-1}\right)}{t^4}\,, \tag{3.6.6}$$

když $t \to 0$ odpovídající $z \to \infty$. Rovnice (3.6.1) nemá v nekonečnu singulární bod, pokud oba výrazy v rovnici (3.6.6) zústávají konečné při $t \to 0$. Má tam ordinární singulární bod při $t \to 0$, pokud zůstávají konečné funkce

$$\frac{2t - P\left(t^{-1}\right)}{t^3}\,, \qquad \frac{Q\left(t^{-1}\right)}{t^6} \tag{3.6.7}$$

a irregulární singulární bod, pokud tyto funkce při $t \to 0$ divergují. Například Besselova diferenciální rovnice

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{W}(z)}{\mathrm{d}z^2} + \frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}\mathcal{W}(z)}{\mathrm{d}z} + \left(1 - \frac{p^2}{z^2}\right)\mathcal{W}(z) \;=\; 0\,,$$

má ordinární singulární bod v $z = 0$ a irregulární singulární bod v $z \to \infty$.

Nejobecnější řešení rovnice (3.6.1) lze zapsat

$$\mathcal{W}(z) \;=\; c_1\mathcal{W}_1(z) + c_2\mathcal{W}_2(z)\,, \tag{3.6.8}$$

kde konstanty c_1 a c_2 se stanovují z okrajových podmínek konkrétního problému. Funkce $\mathcal{W}_1(z)$ a $\mathcal{W}_2(z)$ jsou navzájem lineárně nezávislé. To znamená, že jejich Wronskián je na nějakém nenulovém intervalu proměnné z nenulový

$$\begin{vmatrix} \mathcal{W}_1(z) & \mathcal{W}_2(z) \\ \dfrac{\mathrm{d}\mathcal{W}_1(z)}{\mathrm{d}z} & \dfrac{\mathrm{d}\mathcal{W}_2(z)}{\mathrm{d}z} \end{vmatrix} \neq 0\,. \tag{3.6.9}$$

Podle Fuchsova teorému můžeme nalézt alespoň jedno řešení rovnice (3.6.1) ve tvaru mocninového rozvoje v okolí ordinárního nebo regulárně singulárního bodu z_0 typu

$$\mathcal{W}(z) \;=\; \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda \left(z - z_0\right)^{k+\lambda}\,, \qquad a_\lambda \neq 0\,, \tag{3.6.10}$$

kde zbývá určit počáteční exponent k a koeficienty a_λ.

3.7 Airyho diferenciální rovnice

Nejjednodušší řešení vlnových rovnic (3.2.42) a (3.2.48) ve vrstevnatém prostředí získáme tehdy, když je profil ve směru osy vrstevnatého prostředí (zde ve směru z) tvořen pouze úseky $n = 1, \ldots, \mathcal{N}$, na nichž je jak ε, tak i μ konstantní. Hovoříme o multivrstvě se schodovým profilem. Tímto přístupem můžeme aproximovat s libovolnou přesností každý pro praxi zajímavý profil $\varepsilon(z)$ a $\mu(z)$. Obecné analytické řešení vlnových rovnic (3.2.42) a (3.2.48) pro spojitě proměnný profil je složité. Poněkud schůdný je zjednodušený případ polarizace TE, kde $\kappa_e(z)$ je reálnou lineární funkcí z a κ_m je konstatní, tj. $\mathrm{d}\kappa_m(z)/\mathrm{d}z = 0$. Podobně je schůdný také případ polarizace TM, kde $\kappa_m(z)$ je reálnou lineární funkcí z a κ_e je konstatní, tj. $\mathrm{d}\kappa_e(z)/\mathrm{d}z = 0$. V těchto případech se vlnová rovnice zjednoduší na Airyho diferenciální rovnici. Omezíme se na případ TE. V lineární aproximaci vyjádříme profil

$$\kappa_e(z) \;=\; \kappa_e(0) + \left.\frac{\mathrm{d}\kappa_e(z)}{\mathrm{d}z}\right|_{z=0} z\,. \tag{3.7.1}$$

Po dosazení (3.7.1) do rovnice (3.2.42a) a s uvážením $\kappa_m(z) = \kappa_m(0) = \text{constant}$

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}_x(z)}{\mathrm{d}z^2} + k_0^2\left\{\left[\kappa_e(0) + \left.\frac{\mathrm{d}\kappa_e(z)}{\mathrm{d}z}\right|_{z=0} z\right]\kappa_m(0) - N_y^2\right\}\mathcal{E}_x(z) \;=\; 0\,, \tag{3.7.2}$$

což je diferenciální rovnice typu

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}_x(z)}{\mathrm{d}z^2} + [A_0 + A_1 z]\,\mathcal{E}_x(z) \;=\; 0\,, \tag{3.7.3}$$

kde konstanty $A_0 = k_0^2\left[\kappa_e(0)\,\kappa_m(0) - N_y^2\right]$ a $A_1 = k_0^2\kappa_m(0)\left[\left.\frac{\mathrm{d}\kappa_e(z)}{\mathrm{d}z}\right|_{z=0}\right]$. Substitucí

$$\eta \;=\; A_1^{1/3}\left(z + \frac{A_0}{A_1}\right)\,, \tag{3.7.4}$$

můžeme užitím

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_x(z)}{\mathrm{d}z} &= \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_x(\eta)}{\mathrm{d}\eta}\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}z} \\
&= A_1^{1/3}\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_x(\eta)}{\mathrm{d}\eta} \\
\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}_x(z)}{\mathrm{d}z^2} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_x(z)}{\mathrm{d}z}\right] \\
&= A_1^{1/3}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_x(\eta)}{\mathrm{d}\eta}\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}z}\right] \\
&= A_1^{2/3}\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_x(\eta)}{\mathrm{d}\eta}
\end{aligned}$$

rovnici (3.7.3) transformovat nejprve na

$$A_1^{2/3}\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}_x(\eta)}{\mathrm{d}\eta^2} + A_1^{2/3}\left[A_1^{1/3}\left(z + \frac{A_0}{A_1}\right)\mathcal{E}_x(\eta)\right] \;=\; 0 \tag{3.7.5}$$

a potom na

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}_x(\eta)}{\mathrm{d}\eta^2} + \eta\,\mathcal{E}_x(\eta) \;=\; 0\,. \tag{3.7.6}$$

To je Airyho rovnice. Její řešení lze vyjádřit pomocí Airyho funkcí nebo jako lineární kombinaci Besselovy funkcí prvního druhu řádu 1/3 a Besselovy druhého druhu (Neumannovy funkce) téhož řádu 1/3. Airyho rovnice (3.7.6) je speciálním případem rovnice [4].

$$\frac{\mathrm{d}^2 y\left(x\right)}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1-2a}{x}\,\frac{\mathrm{d}y\left(x\right)}{\mathrm{d}x} + \left[\left(bcx^{c-1}\right)^2 + \frac{a^2-p^2c^2}{x^2}\right] y\left(x\right) \;=\; 0\,. \qquad (3.7.7)$$

Tuto rovnici lze substitucemi transformovat na standartní tvar Besselovy rovnice

$$\frac{\mathrm{d}^2 u\left(z\right)}{\mathrm{d}z^2} + \frac{1}{z}\,\frac{\mathrm{d}u\left(z\right)}{\mathrm{d}z} + \left(1-\frac{p^2}{z^2}\right) u\left(z\right) \;=\; 0\,, \qquad (3.7.8)$$

jejíž řešení můžeme vyjádřit buď jako lineární kombinaci Besselovy a Neumannovy funkce, nebo jako lineární kombinaci Hankelových funkcí prvního a druhého druhu. Volba lineární kombinace Besselovy a Neumannovy funkce řádu p je vhodná pro úlohy se stojatými vlnami

$$u_p\left(z\right) \;=\; \mathcal{A}_p J_p\left(z\right) + \mathcal{B}_p N_p\left(z\right)\,, \qquad (3.7.9a)$$

lineární kombinace Hankelových funkcí prvního a druhého druhu je vhodná pro úlohy s vlnami postupnými

$$u_p\left(z\right) \;=\; \mathcal{C}_p H_p^{(1)}\left(z\right) + \mathcal{D}_p H_p^{(2)}\left(z\right)\,. \qquad (3.7.9b)$$

Důkaz ekvivalence rovnic (3.7.7) a (3.7.8) začneme substitucí

$$y \;=\; x^a u\,. \qquad (3.7.10)$$

Pro derivace dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}y\left(x\right)}{\mathrm{d}x} \;=\; ax^{a-1}u\left(x\right) + x^a\frac{\mathrm{d}u\left(x\right)}{\mathrm{d}x} \qquad (3.7.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^2 y\left(x\right)}{\mathrm{d}x^2} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[ax^{a-1}u\left(x\right) + x^a\frac{\mathrm{d}u\left(x\right)}{\mathrm{d}x}\right] \\ &= a\left(a-1\right)x^{a-2}u\left(x\right) + 2ax^{a-1}\frac{\mathrm{d}u\left(x\right)}{\mathrm{d}x} + x^a\frac{\mathrm{d}^2u\left(x\right)}{\mathrm{d}x^2}\,. \qquad (3.7.12) \end{aligned}$$

Po dosazení do rovnice (3.7.7)

$$\begin{aligned} &x^a\frac{\mathrm{d}^2u\left(x\right)}{\mathrm{d}x^2} + 2ax^{a-1}\frac{\mathrm{d}u\left(x\right)}{\mathrm{d}x} + a\left(a-1\right)x^{a-2}u\left(x\right) + \left(1-2a\right)\left[ax^{a-2}u\left(x\right) + x^{a-1}\frac{\mathrm{d}u\left(x\right)}{\mathrm{d}x}\right] \\ &+\left[\left(bcx^{c-1}\right)^2 + \frac{a^2-p^2c^2}{x^2}\right]x^a u\left(x\right) = 0\,. \qquad (3.7.13) \end{aligned}$$

Úpravou

$$\begin{aligned} &x^a\frac{\mathrm{d}^2u\left(x\right)}{\mathrm{d}x^2} + \left[2ax^{a-1} + \left(1-2a\right)x^{a-1}\right]\frac{\mathrm{d}u\left(x\right)}{\mathrm{d}x} \\ &+\left[\left(1-2a\right)ax^{a-2} + \left(a^2-p^2c^2\right)x^{a-2} + a\left(a-1\right)x^{a-2} + b^2c^2x^{2c+a-2}\right]u\left(x\right) = 0 \qquad (3.7.14) \end{aligned}$$

Po zjednodušení

$$x^{a}\frac{\mathrm{d}^{2}u\left(x\right)}{\mathrm{d}x^{2}}+x^{a-1}\frac{\mathrm{d}u\left(x\right)}{\mathrm{d}x}+c^{2}x^{a-2}\left(b^{2}x^{2c}-p^{2}\right)u\left(x\right)=0\,. \tag{3.7.15}$$

Vydělíme x^{a} a máme

$$\frac{\mathrm{d}^{2}u\left(x\right)}{\mathrm{d}x^{2}}+x^{-1}\frac{\mathrm{d}u\left(x\right)}{\mathrm{d}x}+c^{2}x^{-2}\left(b^{2}x^{2c}-p^{2}\right)u\left(x\right)=0\,. \tag{3.7.16}$$

Změníme proměnnou

$$t \;=\; bx^{c}\,. \tag{3.7.17}$$

Pro derivace funkce $u\left(x\right)$ dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}u\left(x\right)}{\mathrm{d}x} \;=\; \frac{\mathrm{d}u\left(t\right)}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}u\left(t\right)}{\mathrm{d}t}bcx^{c-1} \tag{3.7.18}$$

$$\frac{\mathrm{d}^{2}u\left(x\right)}{\mathrm{d}x^{2}} \;=\; \frac{\mathrm{d}^{2}u\left(t\right)}{\mathrm{d}t^{2}}c^{2}b^{2}x^{2c-2}+\frac{\mathrm{d}u\left(t\right)}{\mathrm{d}t}bc\left(c-1\right)x^{c-2}\,. \tag{3.7.19}$$

Dosadíme do rovnice (3.7.16)

$$\frac{\mathrm{d}^{2}u\left(t\right)}{\mathrm{d}t^{2}}c^{2}b^{2}x^{2c-2}+\frac{\mathrm{d}u\left(t\right)}{\mathrm{d}t}bc\left(c-1\right)x^{c-2}+\frac{\mathrm{d}u\left(t\right)}{\mathrm{d}t}bcx^{c-2}+c^{2}x^{-2}\left(b^{2}x^{2c}-p^{2}\right)u\left(t\right)=0 \tag{3.7.20}$$

Vynásobíme x^{2} a zjednodušíme koeficient u první derivace

$$\frac{\mathrm{d}^{2}u\left(t\right)}{\mathrm{d}t^{2}}c^{2}b^{2}x^{2c}+bc^{2}x^{c}\frac{\mathrm{d}u\left(t\right)}{\mathrm{d}t}+c^{2}\left(b^{2}x^{2c}-p^{2}\right)u\left(t\right) \;=\; 0\,. \tag{3.7.21}$$

Dosadíme podle rovnice (3.7.17) tj. $t=bx^{c}$ a vydělíme c^{2}

$$t^{2}\frac{\mathrm{d}^{2}u\left(t\right)}{\mathrm{d}t^{2}}+t\frac{\mathrm{d}u\left(t\right)}{\mathrm{d}t}+\left(t^{2}-p^{2}\right)u\left(t\right) \;=\; 0\,. \tag{3.7.22}$$

Tento výsledek odpovídá Besselově rovnici (3.7.8). Můžeme tedy obecné řešení rovnice (3.7.6) vyjádřit s uvážením rovnic (3.7.10) a (3.7.17) buď jako lineární kombinaci Besselovy a Neumannovy funkce (řádu p)

$$y_{p}\left(x\right) \;=\; \mathcal{A}_{p}x^{a}J_{p}\left(bx^{c}\right)+\mathcal{B}_{p}x^{a}N_{p}\left(bx^{c}\right)\,, \tag{3.7.23a}$$

nebo jako lineární kombinaci Hankelových funkcí prvního a druhého druhu (řádu p)

$$y_{p}\left(x\right) \;=\; \mathcal{C}_{p}x^{a}H_{p}^{(1)}\left(bx^{c}\right)+\mathcal{D}_{p}x^{a}H_{p}^{(2)}\left(bx^{c}\right)\,. \tag{3.7.23b}$$

Z obecnější rovnice (3.7.7) dostaneme (3.7.6), když položíme $1-2a=0$, $\left(bcx^{c-1}\right)^{2}=$ $=x$ a $a^{2}-c^{2}p^{2}=0$. Odtud

$$a \;=\; \frac{1}{2}\,, \tag{3.7.24a}$$

$$b \;=\; \frac{2}{3}\,, \tag{3.7.24b}$$

$$c \;=\; \frac{3}{2}\,, \tag{3.7.24c}$$

$$p \;=\; \frac{1}{3}\,. \tag{3.7.24d}$$

Pro tento soubor parametrů má speciální řešení rovnic (3.7.23) tvar

$$\mathcal{E}_x(\eta) = \mathcal{A}_{1/3}\eta^{1/2}J_{1/3}\left(\frac{2}{3}\eta^{3/2}\right) + \mathcal{B}_{1/3}\eta^{1/2}N_{1/3}\left(\frac{2}{3}\eta^{3/2}\right), \tag{3.7.25a}$$

nebo

$$\mathcal{E}_x(\eta) = \mathcal{C}_{1/3}\eta^{1/2}H^{(1)}_{1/3}\left(\frac{2}{3}\eta^{3/2}\right) + \mathcal{D}_{1/3}\eta^{1/2}H^{(2)}_{1/3}\left(\frac{2}{3}\eta^{3/2}\right), \tag{3.7.25b}$$

kde proměnná η je dána rovnicí (3.7.4). Po dosazení

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_x(z) = {} & \mathcal{A}_{1/3}\left[A_1^{1/3}\left(z+\frac{A_0}{A_1}\right)\right]^{1/2} J_{1/3}\left\{\frac{2}{3}\left[A_1^{1/3}\left(z+\frac{A_0}{A_1}\right)\right]^{3/2}\right\} \\ & +\mathcal{B}_{1/3}\left[A_1^{1/3}\left(z+\frac{A_0}{A_1}\right)\right]^{1/2} N_{1/3}\left\{\frac{2}{3}\left[A_1^{1/3}\left(z+\frac{A_0}{A_1}\right)\right]^{3/2}\right\},\end{aligned} \tag{3.7.26a}$$

nebo

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_x(z) = {} & \mathcal{C}_{1/3}\left[A_1^{1/3}\left(z+\frac{A_0}{A_1}\right)\right]^{1/2} H^{(1)}_{1/3}\left\{\frac{2}{3}\left[A_1^{1/3}\left(z+\frac{A_0}{A_1}\right)\right]^{3/2}\right\} \\ & +\mathcal{D}_{1/3}\left[A_1^{1/3}\left(z+\frac{A_0}{A_1}\right)\right]^{1/2} H^{(2)}_{1/3}\left\{\frac{2}{3}\left[A_1^{1/3}\left(z+\frac{A_0}{A_1}\right)\right]^{3/2}\right\}.\end{aligned} \tag{3.7.26b}$$

Pole $\mathcal{E}_x(z)$ a $\mathcal{H}_y(z)$ jsou vázána rovnicemi (3.2.37). Pole $\mathcal{H}_y(z)$ tedy plyne z rovnice (3.2.37a)

$$\mathcal{H}_y(z) = \frac{\mathrm{j}}{\omega\mu}\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_x(z)}{\mathrm{d}z} = \frac{\mathrm{j}}{k_0\kappa_m}\left(\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}\right)^{1/2}\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_x(z)}{\mathrm{d}z}. \tag{3.7.27}$$

Tato pole $\mathcal{E}_x(z)$ a $\mathcal{H}_y(z)$ jsou nutná ke stanovení charakteristické matice vrstvy, jejíž permitivita je lineární funkcí z.

3.8 Multivrstva

Uvažujme dvě vrstevnatá obecně nehomogenní prostředí (1) a (2) první ležící mezi rovinami $z = z^{(0)}$ a $z = z^{(1)}$, charakterizované maticí $\mathbf{S}^{(1)}$, a druhé ležící mezi rovinami $z = z^{(1)}$ a $z = z^{(2)}$, charakterizované maticí $\mathbf{S}^{(2)}$, se společným rozhraním

$z = z^{(1)}$. Pole ve vrstvách jsou vázána vztahy

$$\begin{pmatrix} \mathcal{E}_x\left(z^{(0)}\right) \\ \mathcal{H}_y\left(z^{(0)}\right) \\ \mathcal{H}_x\left(z^{(0)}\right) \\ -\mathcal{E}_y\left(z^{(0)}\right) \end{pmatrix} = \mathbf{S}^{(1)}\left(z^{(0)}, z^{(1)}\right) \begin{pmatrix} \mathcal{E}_x\left(z^{(1)}\right) \\ \mathcal{H}_y\left(z^{(1)}\right) \\ \mathcal{H}_x\left(z^{(1)}\right) \\ -\mathcal{E}_y\left(z^{(1)}\right) \end{pmatrix}, \tag{3.8.1a}$$

$$\begin{pmatrix} \mathcal{E}_x\left(z^{(1)}\right) \\ \mathcal{H}_y\left(z^{(1)}\right) \\ \mathcal{H}_x\left(z^{(1)}\right) \\ -\mathcal{E}_y\left(z^{(1)}\right) \end{pmatrix} = \mathbf{S}^{(2)}\left(z^{(1)}, z^{(2)}\right) \begin{pmatrix} \mathcal{E}_x\left(z^{(2)}\right) \\ \mathcal{H}_y\left(z^{(2)}\right) \\ \mathcal{H}_x\left(z^{(2)}\right) \\ -\mathcal{E}_y\left(z^{(2)}\right) \end{pmatrix}, \tag{3.8.1b}$$

takže

$$\begin{pmatrix} \mathcal{E}_x\left(z^{(0)}\right) \\ \mathcal{H}_y\left(z^{(0)}\right) \\ \mathcal{H}_x\left(z^{(0)}\right) \\ -\mathcal{E}_y\left(z^{(0)}\right) \end{pmatrix} = \mathbf{S}^{(1)}\left(z^{(0)}, z^{(1)}\right)\mathbf{S}^{(2)}\left(z^{(1)}, z^{(2)}\right) \begin{pmatrix} \mathcal{E}_x\left(z^{(2)}\right) \\ \mathcal{H}_y\left(z^{(2)}\right) \\ \mathcal{H}_x\left(z^{(2)}\right) \\ -\mathcal{E}_y\left(z^{(2)}\right) \end{pmatrix}. \tag{3.8.2}$$

Tento výsledek lze zobecnit na posloupnost plan-paralelních vrstevnatých prostředí, tj. na tzv. multivrstvu tvořenou $\mathcal{N}$ vrstvami umístěnými v oblastech

$$z^{(0)} \;\; z \;\; z^{(1)},\, z^{(1)} \;\; z \;\; z^{(2)}, \ldots, z^{(n-1)} \;\; z \;\; z^{(n)}, \ldots, z^{(\mathcal{N}-1)} \;\; z \;\; z^{(\mathcal{N})}. \tag{3.8.3}$$

Globální charakteristická matice je vztažena na naši multivrstvu a tvoří ji maticový součin

$$\begin{aligned} \Gamma &= \prod_{n=1}^{\mathcal{N}} \mathbf{S}^{(n)}\left(z^{(n-1)}, z^{(n)}\right) \\ &= \mathbf{S}^{(1)}\left(z^{(0)}, z^{(1)}\right)\mathbf{S}^{(2)}\left(z^{(1)}, z^{(2)}\right)\ldots\mathbf{S}^{(n)}\left(z^{(n-1)}, z^{(n)}\right)\ldots\mathbf{S}^{(\mathcal{N})}\left(z^{(\mathcal{N}-1)}, z^{(\mathcal{N})}\right). \end{aligned} \tag{3.8.4}$$

Rovnici (3.8.2) lze zobecnit na tvar

$$\begin{pmatrix} \mathcal{E}_x^{(1)}\left(z^{(0)}\right) \\ \mathcal{H}_y^{(1)}\left(z^{(0)}\right) \\ \mathcal{H}_x^{(1)}\left(z^{(0)}\right) \\ -\mathcal{E}_y^{(1)}\left(z^{(0)}\right) \end{pmatrix} = \prod_{n=1}^{\mathcal{N}} \mathbf{S}^{(n)}\left(z^{(n-1)}, z^{(n)}\right) \begin{pmatrix} \mathcal{E}_x^{(\mathcal{N})}\left(z^{(\mathcal{N})}\right) \\ \mathcal{H}_y^{(\mathcal{N})}\left(z^{(\mathcal{N})}\right) \\ \mathcal{H}_x^{(\mathcal{N})}\left(z^{(\mathcal{N})}\right) \\ -\mathcal{E}_y^{(\mathcal{N})}\left(z^{(\mathcal{N})}\right) \end{pmatrix}. \tag{3.8.5a}$$

Tyto maticové rovnice popisují vztah mezi celkovým elektrickým a magnetickým polem vln na jedné straně multivrstvy ve vrstvě (1) v rovině $z = z^{(0)}$ a celkovým elektrickým a magnetickým polem vln na druhé straně multivrstvy ve vrstvě $(\mathcal{N})$

v rovině $z = z^{(\mathcal{N})}$. Informace o profilu polí vln unvitř multivrstvy sama o sobě má omezený praktický význam. Mimo jiné je obtížné umístit detektor dovnitř multivrstvy, tj. mezi roviny $z = z^{(0)}$ a $z = z^{(\mathcal{N})}$. Chceme-li zjistit odezvu multivrstvy na vlny přicházející z vnějšku, musíme pole uvnitř multivrstvy svázat s poli vln v jejím okolí.

3.9 Reflexní a transmisní koeficienty

3.9.1 TE polarizace

Celková pole v poloprostorech (0) a $(\mathcal{N}+1)$ obklopujících multivrstvu sestavající z $\mathcal{N}$ vrstev zahrnují obecně vlny postupující k multivrstvě i vlny postupující od multivrstvy v obou poloprostorech. Je výhodné vyjadřovat informaci o polích vln vstupujících a vystupujících z multivrstvy v poloprostorech obklopujících multivrstvu v rovinách omezujících multivrstvu $z = z^{(0)}$ a $z = z^{(\mathcal{N})}$. Používáme přitom idealizovanou představu, že rozhraní multivrstvy s okolím mají nulovou tloušťku.

Vlnu postupující ve vstupním poloprostoru (0) k prvnímu rozhraní $z = z^{(0)}$ multivrstvy označujeme jako *dopadající* i, zpětnou vlnu ve vstupním poloprostoru (0) $(z < z^{(0)})$ jako vlnu *odraženou* r. Ve výstupním poloprostoru $(\mathcal{N}+1)$ $(z > z^{\mathcal{N}})$ obvykle uvažujeme jen vlnu *procházející* t. Často totiž postačí definovat globální amplitudové reflexní a transmisní koeficienty multivrstvy a tím charakterizovat odezvu multivrstvy na vlnu dopadající jen z jednoho z obklopujících poloprostorů, v našem případě z poloprostoru (0). Klademe tedy amplitudu vlny postupující k multivrstvě z poloprostoru $(\mathcal{N}+1)$ nulovou. Globální amplitudové reflexní a transmisní koeficienty definujeme jako poměry amplitud elektrických polí zahrnujících vlny dopadající $\boldsymbol{E}_i^{(0)}\left(z^{(0)}\right)$, odražené $\boldsymbol{E}_r^{(0)}$ a procházející $\boldsymbol{E}_t^{(\mathcal{N}+1)}\left(z^{(\mathcal{N})}\right)$. Globální reflexní koeficienty (popisují odraz) jsou pak vztaženy k rozhraní $z = z^{(0)}$ globální transmisní koeficienty (popisují průchod) zahrnují obě hraniční rozhraní multivrstvy v rovinách $z = z^{(0)}$ a $z = z^{(\mathcal{N})}$. V dalším odstavci rozdělíme celkové pole v poloprostoru (0) na vlnu dopadající a vlnu odraženou a v poloprostoru $(\mathcal{N}+1)$ jednoduše ztotožníme celkové pole s polem vlny procházející. Při této identifikaci jednotlivých vln využijeme okrajové podmínky (spojitost elektrických a magnetických polí vln na rozhraních $z = z^{(0)}$ a $z = z^{(\mathcal{N})}$). Někdy bývá užitečné formulovat i odezvu na vlnu postující z poloprostoru $(\mathcal{N}+1)$ a dopadající na rozhraní $z = z^{(\mathcal{N})}$ s odraženou vlnou v poloprostoru $(\mathcal{N}+1)$ a procházející vlnou v poloprostoru (0).

Uvažujme rovinnou vlnu dopadající s TE polarizací na vrstevnaté prostředí, které je ohraničeno rovinami $z = z^{(0)}$ a $z = z^{(\mathcal{N})}$, $z^{(0)} < z^{(\mathcal{N})}$. Poloprostory $z < z^{(0)}$, resp. $z > z^{(\mathcal{N})}$ jsou vyplněny lineárními homogenními izotropními prostředími charakterizovanými reálnými skalárními elektrickými permitivitami a magnetickými permeabilitami $\varepsilon^{(0)}$ a $\mu^{(0)}$, resp. $\varepsilon^{(\mathcal{N}+1)}$ a $\mu^{(\mathcal{N}+1)}$. Pro jednoduchost předpokládáme, že na rozhraních $z = z^{(0)}$ resp. $z = z^{(\mathcal{N})}$ dochází ke skokové změně materiálových parametrů vstupního homogenního poloprostoru $\varepsilon^{(0)}$ a $\mu^{(0)}$ na $\varepsilon\left(z^{(0)}\right)$ a $\mu\left(z^{(0)}\right)$, resp. ke skokové změně materiálových parametrů výstupního homogenního poloprostoru $\varepsilon^{(\mathcal{N}+1)}$ a $\mu^{(\mathcal{N}+1)}$ na $\varepsilon\left(z^{(\mathcal{N})}\right)$ a $\mu\left(z^{(\mathcal{N})}\right)$.

Najdeme vztahy pro amplitudy elektrických polí odražených a procházejících vln. Nechť $E_i^{(0)}$, resp. $E_r^{(0)}$, a $E_t^{(\mathcal{N}+1)}$, označují obecně komplexní amplitudy elektrického pole dopadající, resp. odražené vlny v prostředí (0) a vlny procházející do prostředí $(\mathcal{N}+1)$. Vektor šíření $\gamma_i^{(0)}$ dopadající vlny ze vstupního prostředí (0) a vektor šíření $\gamma_r^{(0)}$ vlny odražené do téhož prostředí (0) resp. vektor šíření γ_t vlny procházející do výstupního prostředí $\mathcal{N}+1$ svírá s osou vrstevnatého prostředí (ležící v ose z) úhel $\theta^{(0)}$, resp. $\theta^{(\mathcal{N}+1)}$.

Okrajové podmínky vyžadují spojitost složek elektrických $\boldsymbol{E}$ a magnetických $\boldsymbol{H}$ polí rovnoběžných s rozhraními na obou stranách každého rozhraní. Z Maxwellovy rovnice

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

pro pole úměrná $\exp\left[\mathrm{j}\left(\omega t - \gamma \cdot \boldsymbol{r}\right)\right]$ při splnění lineárního materiálového vztahu $\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}$ plyne

$$\begin{aligned} -\mathrm{j}\gamma \times \boldsymbol{E} &= -\mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{H} \\ \gamma \times \boldsymbol{E} &= \omega\mu\boldsymbol{H} \\ \omega\left(\varepsilon\mu\right)^{1/2}\gamma \times \boldsymbol{E} &= \omega\mu\boldsymbol{H}\,, \end{aligned}$$

tj.

$$\boldsymbol{H} = \left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^{1/2} \gamma \times \boldsymbol{E}\,, \tag{3.9.1}$$

kde γ je jednotkový vektor ve směru vektoru šíření γ. Jednotkové vektory ve směrech vektorů šíření dopadající, odražené a procházející vlny jsou omezeny naší volbou roviny dopadu na rovinu kolmou na $\hat{\boldsymbol{x}}$

$$\gamma_i^{(0)} = \hat{\boldsymbol{y}}\sin\theta^{(0)} + \hat{\boldsymbol{z}}\cos\theta^{(0)} \tag{3.9.2a}$$

$$\gamma_r^{(0)} = \hat{\boldsymbol{y}}\sin\theta^{(0)} - \hat{\boldsymbol{z}}\cos\theta^{(0)}\,, \tag{3.9.2b}$$

$$\gamma_t^{(\mathcal{N}+1)} = \hat{\boldsymbol{y}}\sin\theta^{(\mathcal{N}+1)} + \hat{\boldsymbol{z}}\cos\theta^{(\mathcal{N}+1)}\,. \tag{3.9.2c}$$

Vynecháme faktor $\exp(\mathrm{j}\omega t)$ a zapíšeme elektrická a magnetická pole dopadající, odražené a procházející vlny. Elektrické pole dopadající vlny v oblasti $z \;\; z^{(0)}$

$$\boldsymbol{E}_i^{(0)} = \hat{\boldsymbol{x}}E_{0i}^{(0)} \exp\left[-\mathrm{j}\left(\varepsilon^{(0)}\mu^{(0)}\right)^{1/2}\omega\left(\hat{\boldsymbol{y}}\sin\theta^{(0)} + \hat{\boldsymbol{z}}\cos\theta^{(0)}\right)\cdot\left(\hat{\boldsymbol{y}}y + \hat{\boldsymbol{z}}z\right)\right], \tag{3.9.3a}$$

elektrické pole odražené vlny

$$\boldsymbol{E}_r^{(0)} = \hat{\boldsymbol{x}}E_{0r}^{(0)} \exp\left[-\mathrm{j}\left(\varepsilon^{(0)}\mu^{(0)}\right)^{1/2}\omega\left(\hat{\boldsymbol{y}}\sin\theta^{(0)} - \hat{\boldsymbol{z}}\cos\theta^{(0)}\right)\cdot\left(\hat{\boldsymbol{y}}y + \hat{\boldsymbol{z}}z\right)\right], \tag{3.9.3b}$$

a elektrické pole vlny procházející

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}_t^{(\mathcal{N}+1)} = {} & \hat{\boldsymbol{x}}E_{0t}^{(\mathcal{N}+1)} \\ & \times \exp\left[-\mathrm{j}\left(\varepsilon^{(\mathcal{N}+1)}\mu^{(\mathcal{N}+1)}\right)^{1/2}\omega\left(\hat{\boldsymbol{y}}\sin\theta^{(\mathcal{N}+1)} + \hat{\boldsymbol{z}}\cos\theta^{(\mathcal{N}+1)}\right)\cdot\left(\hat{\boldsymbol{y}}y + \hat{\boldsymbol{z}}z\right)\right]. \end{aligned} \tag{3.9.3c}$$

Zde $E_{0i}^{(0)}$, $E_{0r}^{(0)}$ a $E_{0t}^{(0)}$ jsou skalární komplexní amplitudy elektrických polí (orientovaných ve směru x) vln v počátku souřadnic a času. S uvážením rovnice (3.9.1) dostaneme pro magnetické pole dopadající vlny

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{H}_i^{(0)} &= \left(\frac{\varepsilon^{(0)}}{\mu^{(0)}}\right)^{1/2} \gamma_i^{(0)} \times \boldsymbol{E}_i^{(0)} \\
&= \left(\frac{\varepsilon^{(0)}}{\mu^{(0)}}\right)^{1/2} \left(\hat{\boldsymbol{y}} \sin\theta^{(0)} + \hat{\boldsymbol{z}} \cos\theta^{(0)}\right) \times \hat{\boldsymbol{x}} E_{0i}^{(0)} \\
&\quad \times \exp\left[-\mathrm{j}\left(\varepsilon^{(0)}\mu^{(0)}\right)^{1/2} \omega \left(y \sin\theta^{(0)} + z\cos\theta^{(0)}\right)\right] \\
&= E_{0i}^{(0)} \left(\frac{\varepsilon^{(0)}}{\mu^{(0)}}\right)^{1/2} \left(-\hat{\boldsymbol{z}} \sin\theta^{(0)} + \hat{\boldsymbol{y}} \cos\theta^{(0)}\right) \\
&\quad \times \exp\left[-\mathrm{j}\left(\varepsilon^{(0)}\mu^{(0)}\right)^{1/2} \omega \left(y \sin\theta^{(0)} + z\cos\theta^{(0)}\right)\right] ,
\end{aligned} \tag{3.9.3d}$$

pro magnetické pole odražené vlny

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{H}_r^{(0)} &= \left(\frac{\varepsilon^{(0)}}{\mu^{(0)}}\right)^{1/2} \gamma_r^{(0)} \times \boldsymbol{E}_r^{(0)} \\
&= \left(\frac{\varepsilon^{(0)}}{\mu^{(0)}}\right)^{1/2} \left(\hat{\boldsymbol{y}} \sin\theta^{(0)} - \hat{\boldsymbol{z}} \cos\theta^{(0)}\right) \times \hat{\boldsymbol{x}} E_{0r}^{(0)} \\
&\quad \times \exp\left[-\mathrm{j}\left(\varepsilon^{(0)}\mu^{(0)}\right)^{1/2} \omega \left(y \sin\theta^{(0)} - z\cos\theta^{(0)}\right)\right] \\
&= E_{0r}^{(0)} \left(\frac{\varepsilon^{(0)}}{\mu^{(0)}}\right)^{1/2} \left(-\hat{\boldsymbol{z}} \sin\theta^{(0)} - \hat{\boldsymbol{y}} \cos\theta^{(0)}\right) \\
&\quad \times \exp\left[-\mathrm{j}\left(\varepsilon^{(0)}\mu^{(0)}\right)^{1/2} \omega \left(y \sin\theta^{(0)} - z\cos\theta^{(0)}\right)\right] ,
\end{aligned} \tag{3.9.3e}$$

pro magnetické pole vlny procházející

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{H}_t^{(\mathcal{N}+1)} &= \left(\frac{\varepsilon^{(\mathcal{N}+1)}}{\mu^{(\mathcal{N}+1)}}\right)^{1/2} \gamma_t^{(\mathcal{N}+1)} \times \boldsymbol{E}_t^{(\mathcal{N}+1)} \\
&= E_{0t}^{(\mathcal{N}+1)} \left(\frac{\varepsilon^{(\mathcal{N}+1)}}{\mu^{(\mathcal{N}+1)}}\right)^{1/2} \left(-\hat{\boldsymbol{z}} \sin\theta^{(\mathcal{N}+1)} + \hat{\boldsymbol{y}} \cos\theta^{(\mathcal{N}+1)}\right) \\
&\quad \times \exp\left[-\mathrm{j}\left(\varepsilon^{(\mathcal{N}+1)}\mu^{(\mathcal{N}+1)}\right)^{1/2} \omega \left(y \sin\theta^{(\mathcal{N}+1)} + z\cos\theta^{(\mathcal{N}+1)}\right)\right] .
\end{aligned} \tag{3.9.3f}$$

Rovnice (3.9.3) odvozené z Maxwellových rovnic určují vzájemnou orientaci vektorů polí dopadajících, odražených a procházejících vln.[6] Uvážili jsme rovnice

[6]Při orientaci vektoru šíření dopadající vlny souhlasně s $+\hat{\boldsymbol{z}}$ $\theta^{(0)} = 0$ a kladné orientaci pole $\boldsymbol{E}_i^{(0)}$ souhlasně s $+\hat{\boldsymbol{x}}$ odpovídá kladná orientace $\boldsymbol{H}_i^{(0)}$ orientaci $+\hat{\boldsymbol{y}}$ v souladu s rovnicí (3.9.3d).

(3.2.22) a (3.2.23) pro TE polarizaci, tj.

$$\begin{aligned} E_x(y,z,t) &= \mathcal{E}_x(z)\exp\left[\mathrm{j}\left(\omega t \mp k_0 N_y y\right)\right], && (3.9.4a)\\ H_y(y,z,t) &= \mathcal{H}_y(z)\exp\left[\mathrm{j}\left(\omega t \mp k_0 N_y y\right)\right] && (3.9.4b)\\ H_z(y,z,t) &= \mathcal{H}_z(z)\exp\left[\mathrm{j}\left(\omega t \mp k_0 N_y y\right)\right]. && (3.9.4c) \end{aligned}$$

Naší volbě kladné orientace složky vektoru šíření $(+y)$ kolmé na osu vrstevnatého prostředí z odpovídá horní znaménko.

Zde

$$N_y = \left(\varepsilon^{(0)}\mu^{(0)}\right)^{1/2}\sin\theta^{(0)} = \left(\varepsilon^{(\mathcal{N}+1)}\mu^{(\mathcal{N}+1)}\right)^{1/2}\sin\theta^{(\mathcal{N}+1)} \qquad (3.9.5)$$

$$\frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_{\mathrm{vac}}}, \qquad (3.9.6)$$

λ_{vac} je vlnová délka monochromatické vlny o úhlové frekvenci ω ve vakuu postupující s fázovou rychlostí c.

Celkové elektrické pole ve vstupním prostředí (0) má pro TE polarizaci pouze složku ve směru $\hat{\boldsymbol{x}}$ a tvoří jej superpozice dopadající vlny $\boldsymbol{E}_i^{(0)}$ a odražené vlny $\boldsymbol{E}_r^{(0)}$ daných rovnicemi (3.9.3a) a (3.9.3a). V rovině $z = z^{(0)}$ máme

$$\begin{aligned} &\left[\boldsymbol{E}_i^{(0)}\left(z^{(0)}\right) + \boldsymbol{E}_r^{(0)}\left(z^{(0)}\right)\right]\cdot\hat{\boldsymbol{x}}\\ &= \left\{E_{0i}^{(0)}\exp\left[-\mathrm{j}\left(\varepsilon^{(0)}\mu^{(0)}\right)^{1/2}\omega z^{(0)}\cos\theta^{(0)}\right] + E_{0r}^{(0)}\exp\left[\mathrm{j}\left(\varepsilon^{(0)}\mu^{(0)}\right)^{1/2}\omega z^{(0)}\cos\theta^{(0)}\right]\right\}\\ &\quad\times\exp\left[-\mathrm{j}\left(\varepsilon^{(0)}\mu^{(0)}\right)^{1/2}\omega y\sin\theta^{(0)}\right]\\ &= \mathcal{E}_x^{(0)}\left(z^{(0)}\right)\exp\left[-\mathrm{j}\left(\varepsilon^{(0)}\mu^{(0)}\right)^{1/2}\omega y\sin\theta^{(0)}\right]. \end{aligned} \qquad (3.9.7a)$$

Celkové elektrické pole ve výstupním prostředí $(\mathcal{N}+1)$ má pro TE polarizaci pouze složku ve směru $\hat{\boldsymbol{x}}$ a tvoří jej samostaná procházející vlna, neboť přepokladáme, že amplituda vlny postupující z poloprostoru $z > z^{(\mathcal{N}+1)}$ k rozhraní $z = z^{(\mathcal{N})}$ je nulová. V rovině $z = z^{(\mathcal{N})}$ máme

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}_t^{(\mathcal{N}+1)}\left(z^{(\mathcal{N})}\right)\cdot\hat{\boldsymbol{x}} &= E_{0t}^{(\mathcal{N}+1)}\\ &\quad\times\exp\left[-\mathrm{j}\left(\varepsilon^{(\mathcal{N}+1)}\mu^{(\mathcal{N}+1)}\right)^{1/2}\omega\left(y\sin\theta^{(\mathcal{N}+1)} + z^{(\mathcal{N})}\cos\theta^{(\mathcal{N}+1)}\right)\right]\\ &= \mathcal{E}_x^{(\mathcal{N}+1)}\left(z^{(\mathcal{N})}\right)\exp\left[-\mathrm{j}\left(\varepsilon^{(\mathcal{N}+1)}\mu^{(\mathcal{N}+1)}\right)^{1/2}\omega y\sin\theta^{(\mathcal{N}+1)}\right] \end{aligned} \qquad (3.9.7b)$$

kde díky Snellovu zákonu o zachování tečných složek vektorů šíření je

$$\exp\left[-\mathrm{j}\left(\varepsilon^{(0)}\mu^{(0)}\right)^{1/2}\omega y\sin\theta^{(0)}\right] = \exp\left[-\mathrm{j}\left(\varepsilon^{(\mathcal{N}+1)}\mu^{(\mathcal{N}+1)}\right)^{1/2}\omega y\sin\theta^{(\mathcal{N}+1)}\right].$$

Avšak při orientaci vektoru šíření odražené vlny souhlasně s $-\hat{\boldsymbol{z}}$ $\theta^{(0)} = 0$ a kladné orientaci pole $\boldsymbol{E}_r^{(0)}$ souhlasně s $+\hat{\boldsymbol{x}}$ odpovídá kladné orientace $\boldsymbol{H}_i^{(0)}$ orientace souhlasně s $-\hat{\boldsymbol{y}}$ v souladu s rovnicí (3.9.3e), *tedy opačně než u vlny dopadající*. Při orientaci vektoru šíření procházející vlny souhlasně s $+\hat{\boldsymbol{z}}$ $\theta^{(0)} = 0$ a kladné orientaci pole $\boldsymbol{E}_t^{(\mathcal{N}+1)}$ souhlasně s $+\hat{\boldsymbol{x}}$ odpovídá kladná orientace $\boldsymbol{H}_t^{(\mathcal{N}+1)}$ orientaci $+\hat{\boldsymbol{y}}$ v souladu s rovnicí (3.9.3f) podobně jako u vlny dopadající.

Složka celkového magnetického pole ve směru $\hat{\boldsymbol{y}}$ ve vstupním prostředí (0) v rovině $z = z^{(0)}$ je podle rovnic (3.9.3d) a (3.9.3e) dána superpozicí

$$\begin{aligned}
&\left[\boldsymbol{H}_i^{(0)}\left(z^{(0)}\right) + \boldsymbol{H}_r^{(0)}\left(z^{(0)}\right)\right]\cdot\hat{\boldsymbol{y}} \\
&= \left(\frac{\varepsilon^{(0)}}{\mu^{(0)}}\right)^{1/2}\cos\theta^{(0)}\left\{E_{0i}^{(0)}\exp\left[-\mathrm{j}\left(\varepsilon^{(0)}\mu^{(0)}\right)^{1/2}\omega z^{(0)}\cos\theta^{(0)}\right]\right. \\
&- \left.E_{0r}^{(0)}\exp\left[\mathrm{j}\left(\varepsilon^{(0)}\mu^{(0)}\right)^{1/2}\omega z^{(0)}\cos\theta^{(0)}\right]\right\}\exp\left[-\mathrm{j}\left(\varepsilon^{(0)}\mu^{(0)}\right)^{1/2}\omega y\sin\theta^{(0)}\right] \\
&= \mathcal{H}_y\left(z^{(0)}\right)\exp\left[-\mathrm{j}\left(\varepsilon^{(0)}\mu^{(0)}\right)^{1/2}\omega y\sin\theta^{(0)}\right]\,. \qquad (3.9.7c)
\end{aligned}$$

Složka celkového magnetického pole ve směru $\hat{\boldsymbol{y}}$ ve výstupním prostředí $(\mathcal{N}+1)$ má je opět tvořena samostatnou procházející vlnou. V rovině $z = z^{(\mathcal{N})}$ máme

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{H}_t^{(\mathcal{N}+1)}\left(z^{(\mathcal{N})}\right)\cdot\hat{\boldsymbol{y}} &= \left(\frac{\varepsilon^{(\mathcal{N}+1)}}{\mu^{(\mathcal{N}+1)}}\right)^{1/2}\cos\theta^{(\mathcal{N}+1)}E_{0t}^{(\mathcal{N}+1)}\left(z^{(\mathcal{N})}\right) \\
&\quad\times\exp\left[-\mathrm{j}\left(\varepsilon^{(\mathcal{N}+1)}\mu^{(\mathcal{N}+1)}\right)^{1/2}\omega\left(y\sin\theta^{(\mathcal{N}+1)} + z^{(\mathcal{N})}\cos\theta^{(\mathcal{N}+1)}\right)\right] \\
&= \mathcal{H}_y\left(z^{(\mathcal{N})}\right)\exp\left[-\mathrm{j}\left(\varepsilon^{(\mathcal{N}+1)}\mu^{(\mathcal{N}+1)}\right)^{1/2}\omega y\sin\theta^{(\mathcal{N}+1)}\right]\,. \qquad (3.9.7d)
\end{aligned}$$

Označíme

$$\mathcal{E}_i^{(0)}\left(z^{(0)}\right) = E_{0i}^{(0)}\exp\left[-\mathrm{j}\left(\varepsilon^{(0)}\mu^{(0)}\right)^{1/2}\omega z^{(0)}\cos\theta^{(0)}\right]\,, \qquad (3.9.8a)$$

$$\mathcal{E}_r^{(0)}\left(z^{(0)}\right) = E_{0r}^{(0)}\exp\left[\mathrm{j}\left(\varepsilon^{(0)}\mu^{(0)}\right)^{1/2}\omega z^{(0)}\cos\theta^{(0)}\right]\,, \qquad (3.9.8b)$$

$$\mathcal{E}_t^{(\mathcal{N}+1)}\left(z^{(\mathcal{N})}\right) = E_{0t}^{(\mathcal{N}+1)}\exp\left[-\mathrm{j}\left(\varepsilon^{(\mathcal{N}+1)}\mu^{(\mathcal{N}+1)}\right)^{1/2}\omega z^{(\mathcal{N})}\cos\theta^{(\mathcal{N}+1)}\right]\,. \qquad (3.9.8c)$$

Spojitost celkových tečných složek polí pro rozhraní $z = z^{(0)}$ vyjadřují rovnice

$$\mathcal{E}_x^{(0)}\left(z^{(0)}\right) = \mathcal{E}_x^{(1)}\left(z^{(0)}\right)\,, \qquad (3.9.9a)$$

$$\mathcal{H}_y^{(0)}\left(z^{(0)}\right) = \mathcal{H}_y^{(1)}\left(z^{(0)}\right)\,, \qquad (3.9.9b)$$

nebo maticově

$$\begin{pmatrix} \mathcal{E}_x^{(0)}\left(z^{(0)}\right) \\ \mathcal{H}_y^{(0)}\left(z^{(0)}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_x^{(1)}\left(z^{(0)}\right) \\ \mathcal{H}_y^{(1)}\left(z^{(0)}\right) \end{pmatrix}\,. \qquad (3.9.10)$$

Spojitost celkových tečných složek polí na rozhraní $z = z^{(\mathcal{N})}$ je vyjádřena rovnicemi

$$\mathcal{E}_x^{(\mathcal{N})}\left(z^{(\mathcal{N})}\right) = \mathcal{E}_x^{(\mathcal{N}+1)}\left(z^{(\mathcal{N})}\right)\,, \qquad (3.9.11a)$$

$$\mathcal{H}_y^{(\mathcal{N})}\left(z^{(\mathcal{N})}\right) = \mathcal{H}_y^{(\mathcal{N}+1)}\left(z^{(\mathcal{N})}\right)\,, \qquad (3.9.11b)$$

nebo maticově

$$\begin{pmatrix} \mathcal{E}_x^{(\mathcal{N})}\left(z^{(\mathcal{N})}\right) \\ \mathcal{H}_y^{(\mathcal{N})}\left(z^{(\mathcal{N})}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_x^{(\mathcal{N}+1)}\left(z^{(\mathcal{N})}\right) \\ \mathcal{H}_y^{(\mathcal{N}+1)}\left(z^{(\mathcal{N})}\right) \end{pmatrix} . \tag{3.9.12}$$

Celkové pole v poloprostoru $z \ \ z^{(0)}$ na rozhraní $z = z^{(0)}$ tvoří součet polí dopadající a odražené vlny

$$\mathcal{E}_i^{(0)}\left(z^{(0)}\right) + \mathcal{E}_r^{(0)}\left(z^{(0)}\right) = \mathcal{E}_x^{(1)}\left(z^{(0)}\right) , \tag{3.9.13a}$$

$$\left(\frac{\varepsilon^{(0)}}{\mu^{(0)}}\right)^{1/2} \cos\theta^{(0)} \left[\mathcal{E}_i^{(0)}\left(z^{(0)}\right) - \mathcal{E}_r^{(0)}\left(z^{(0)}\right)\right] = \mathcal{H}_y^{(1)}\left(z^{(0)}\right) . \tag{3.9.13b}$$

K celkovému poli na rozhraní $z = z^{(\mathcal{N})}$ přispívá pouze procházející vlna (vystupující z multivrstvy), neboť amplitudu vlny dopadající na multivrstvu z poloprostoru $z \ \ z^{(\mathcal{N})}$ klademe rovnou nule

$$\mathcal{E}_t^{(\mathcal{N}+1)}\left(z^{(\mathcal{N})}\right) = \mathcal{E}_x^{(\mathcal{N})}\left(z^{(\mathcal{N})}\right) , \tag{3.9.13c}$$

$$\left(\frac{\varepsilon^{(\mathcal{N}+1)}}{\mu^{(\mathcal{N}+1)}}\right)^{1/2} \cos\theta^{(\mathcal{N}+1)} \mathcal{E}_t^{(\mathcal{N}+1)}\left(z^{(\mathcal{N})}\right) = \mathcal{H}_y^{(\mathcal{N})}\left(z^{(\mathcal{N})}\right) . \tag{3.9.13d}$$

Na pravých stranách rovnic vystupují složky sloupcových vektorů z rovnic (3.8.2). V maticové vyjádření

$$\begin{pmatrix} \mathcal{E}_x^{(1)}\left(z^{(0)}\right) \\ \mathcal{H}_y^{(1)}\left(z^{(0)}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \left(\frac{\varepsilon^{(0)}}{\mu^{(0)}}\right)^{1/2} \cos\theta^{(0)} & -\left(\frac{\varepsilon^{(0)}}{\mu^{(0)}}\right)^{1/2} \cos\theta^{(0)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{E}_i^{(0)}\left(z^{(0)}\right) \\ \mathcal{E}_r^{(0)}\left(z^{(0)}\right) \end{pmatrix} , \tag{3.9.14a}$$

$$\begin{pmatrix} \mathcal{E}_x^{(\mathcal{N})}\left(z^{(\mathcal{N})}\right) \\ \mathcal{H}_y^{(\mathcal{N})}\left(z^{(\mathcal{N})}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \left(\frac{\varepsilon^{(\mathcal{N}+1)}}{\mu^{(\mathcal{N}+1)}}\right)^{1/2} \cos\theta^{(\mathcal{N}+1)} & -\left(\frac{\varepsilon^{(\mathcal{N}+1)}}{\mu^{(\mathcal{N}+1)}}\right)^{1/2} \cos\theta^{(\mathcal{N}+1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^{\mathrm{TE}}\mathcal{E}_t^{(\mathcal{N}+1)}\left(z^{(\mathcal{N})}\right) \\ 0 \end{pmatrix} . \tag{3.9.14b}$$

Inverzí rovnice (3.9.14a)

$$\begin{pmatrix} \mathcal{E}_i^{(0)}\left(z^{(0)}\right) \\ \mathcal{E}_r^{(0)}\left(z^{(0)}\right) \end{pmatrix} = \frac{1}{2\cos\theta^{(0)}} \left(\frac{\mu^{(0)}}{\varepsilon^{(0)}}\right)^{1/2} \begin{pmatrix} \left(\frac{\varepsilon^{(0)}}{\mu^{(0)}}\right)^{1/2} \cos\theta^{(0)} & 1 \\ \left(\frac{\varepsilon^{(0)}}{\mu^{(0)}}\right)^{1/2} \cos\theta^{(0)} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{E}_x^{(1)}\left(z^{(0)}\right) \\ \mathcal{H}_y^{(1)}\left(z^{(0)}\right) \end{pmatrix} . \tag{3.9.15}$$

S ohledem na značení v rovnici (3.8.4) charakteristickou matici multivrstvy pro TE polarizaci zapíšeme

$$
{}^{\mathrm{TE}}\Gamma = \prod_{n=1}^{\mathcal{N}} {}^{\mathrm{TE}}\mathbf{S}^{(n)} = {}^{\mathrm{TE}}\mathbf{S}^{(1)}\, {}^{\mathrm{TE}}\mathbf{S}^{(2)} \ldots {}^{\mathrm{TE}}\mathbf{S}^{(n)} \ldots {}^{\mathrm{TE}}\mathbf{S}^{(\mathcal{N})} = \begin{pmatrix} {}^{\mathrm{TE}}\Gamma_{11} & {}^{\mathrm{TE}}\Gamma_{12} \\ {}^{\mathrm{TE}}\Gamma_{21} & {}^{\mathrm{TE}}\Gamma_{22} \end{pmatrix} . \tag{3.9.16}
$$

S její pomocí můžeme vztah mezi amplitudami elektrických polí dopadající, odražené a procházející vlny vyjádřit jako

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} \mathcal{E}_i^{(0)}\left(z^{(0)}\right) \\ \mathcal{E}_r^{(0)}\left(z^{(0)}\right) \end{pmatrix} \\
= \;& \frac{1}{2\cos\theta^{(0)}} \left(\frac{\mu^{(0)}}{\varepsilon^{(0)}}\right)^{1/2} \begin{pmatrix} \left(\dfrac{\varepsilon^{(0)}}{\mu^{(0)}}\right)^{1/2} \cos\theta^{(0)} & 1 \\ \left(\dfrac{\varepsilon^{(0)}}{\mu^{(0)}}\right)^{1/2} \cos\theta^{(0)} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{pmatrix} \\
\times \;& \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \left(\dfrac{\varepsilon^{(\mathcal{N}+1)}}{\mu^{(\mathcal{N}+1)}}\right)^{1/2} \cos\theta^{(\mathcal{N}+1)} & -\left(\dfrac{\varepsilon^{(\mathcal{N}+1)}}{\mu^{(\mathcal{N}+1)}}\right)^{1/2} \cos\theta^{(\mathcal{N}+1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{E}_t^{(\mathcal{N}+1)}\left(z^{(\mathcal{N})}\right) \\ 0 \end{pmatrix} .
\end{aligned} \tag{3.9.17}
$$

Po vynásobení

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} \mathcal{E}_i^{(0)}\left(z^{(0)}\right) \\ \\ \mathcal{E}_r^{(0)}\left(z^{(0)}\right) \end{pmatrix} \\
= \;& \frac{1}{2\cos\theta^{(0)}} \left(\frac{\mu^{(0)}}{\varepsilon^{(0)}}\right)^{1/2} \begin{pmatrix} \left(\dfrac{\varepsilon^{(0)}}{\mu^{(0)}}\right)^{1/2} \cos\theta^{(0)}\Gamma_{11} + \Gamma_{21} & \left(\dfrac{\varepsilon^{(0)}}{\mu^{(0)}}\right)^{1/2} \cos\theta^{(0)}\Gamma_{12} + \Gamma_{22} \\ \\ \left(\dfrac{\varepsilon^{(0)}}{\mu^{(0)}}\right)^{1/2} \cos\theta^{(0)}\Gamma_{11} - \Gamma_{21} & \left(\dfrac{\varepsilon^{(0)}}{\mu^{(0)}}\right)^{1/2} \cos\theta^{(0)}\Gamma_{12} - \Gamma_{22} \end{pmatrix} \\
\times \;& \begin{pmatrix} 1 \\ \left(\dfrac{\varepsilon^{(\mathcal{N}+1)}}{\mu^{(\mathcal{N}+1)}}\right)^{1/2} \cos\theta^{(\mathcal{N}+1)} \end{pmatrix} \mathcal{E}_t^{(\mathcal{N}+1)}\left(z^{(\mathcal{N})}\right) \\
= \;& \frac{\mathcal{E}_t^{(\mathcal{N}+1)}\left(z^{(\mathcal{N})}\right)}{2\cos\theta^{(0)}} \left(\frac{\mu^{(0)}}{\varepsilon^{(0)}}\right)^{1/2} \\
\times \;& \begin{pmatrix} \left(\dfrac{\varepsilon^{(0)}}{\mu^{(0)}}\right)^{1/2} \cos\theta^{(0)}\Gamma_{11} + \Gamma_{21} + \left(\dfrac{\varepsilon^{(\mathcal{N}+1)}}{\mu^{(\mathcal{N}+1)}}\right)^{1/2} \cos\theta^{(\mathcal{N}+1)} \left[\left(\dfrac{\varepsilon^{(0)}}{\mu^{(0)}}\right)^{1/2} \cos\theta^{(0)}\Gamma_{12} + \Gamma_{22}\right] \\ \\ \left(\dfrac{\varepsilon^{(0)}}{\mu^{(0)}}\right)^{1/2} \cos\theta^{(0)}\Gamma_{11} - \Gamma_{21} + \left(\dfrac{\varepsilon^{(\mathcal{N}+1)}}{\mu^{(\mathcal{N}+1)}}\right)^{1/2} \cos\theta^{(\mathcal{N}+1)} \left[\left(\dfrac{\varepsilon^{(0)}}{\mu^{(0)}}\right)^{1/2} \cos\theta^{(0)}\Gamma_{12} - \Gamma_{22}\right] \end{pmatrix} .
\end{aligned} \tag{3.9.18}
$$

Připojme označení TE polarizace k symbolům pro amplitudy elektrického pole dopadající, odražené a procházející vlny

$$\begin{pmatrix} \mathcal{E}_i^{(0)}\left(z^{(0)}\right) \\ \mathcal{E}_r^{(0)}\left(z^{(0)}\right) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} {}^{\mathrm{TE}}\mathcal{E}_i^{(0)}\left(z^{(0)}\right) \\ {}^{\mathrm{TE}}\mathcal{E}_r^{(0)}\left(z^{(0)}\right) \end{pmatrix}, \tag{3.9.19a}$$

$$\begin{pmatrix} \mathcal{E}_t^{(\mathcal{N}+1)}\left(z^{(\mathcal{N})}\right) \\ 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} {}^{\mathrm{TE}}\mathcal{E}_t^{(\mathcal{N}+1)}\left(z^{(\mathcal{N})}\right) \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{3.9.19b}$$

Globální reflexní amplitudový koeficient multivrstvy ${}^{\mathrm{TE}}r^{(0,\mathcal{N}+1)}$ obklopené poloprostory (0) a $(\mathcal{N}+1)$ potom bude

$$\begin{aligned} {}^{\mathrm{TE}}r^{(0,\mathcal{N}+1)} &= \frac{{}^{\mathrm{TE}}\mathcal{E}_r^{(0)}\left(z^{(0)}\right)}{{}^{\mathrm{TE}}\mathcal{E}_i^{(0)}\left(z^{(0)}\right)} = \frac{\mathcal{E}_r^{(0)}\left(z^{(0)}\right)}{\mathcal{E}_i^{(0)}\left(z^{(0)}\right)} \\ &= \frac{\left(\frac{\varepsilon^{(0)}}{\mu^{(0)}}\right)^{1/2}\cos\theta^{(0)}\Gamma_{11} - \Gamma_{21} + \left(\frac{\varepsilon^{(\mathcal{N}+1)}}{\mu^{(\mathcal{N}+1)}}\right)^{1/2}\cos\theta^{(\mathcal{N}+1)}\left[\left(\frac{\varepsilon^{(0)}}{\mu^{(0)}}\right)^{1/2}\cos\theta^{(0)}\Gamma_{12} - \Gamma_{22}\right]}{\left(\frac{\varepsilon^{(0)}}{\mu^{(0)}}\right)^{1/2}\cos\theta^{(0)}\Gamma_{11} + \Gamma_{21} + \left(\frac{\varepsilon^{(\mathcal{N}+1)}}{\mu^{(\mathcal{N}+1)}}\right)^{1/2}\cos\theta^{(\mathcal{N}+1)}\left[\left(\frac{\varepsilon^{(0)}}{\mu^{(0)}}\right)^{1/2}\cos\theta^{(0)}\Gamma_{12} + \Gamma_{22}\right]}. \end{aligned} \tag{3.9.20a}$$

Odpovídající globální transmisní amplitudový koeficient multivrstvy ${}^{\mathrm{TE}}t^{(0,\mathcal{N}+1)}$ obklopené poloprostory (0) a $(\mathcal{N}+1)$ bude

$$\begin{aligned} {}^{\mathrm{TE}}t^{(0,\mathcal{N}+1)} &= \frac{{}^{\mathrm{TE}}\mathcal{E}_t^{(\mathcal{N}+1)}\left(z^{(\mathcal{N})}\right)}{{}^{\mathrm{TE}}\mathcal{E}_i^{(0)}\left(z^{(0)}\right)} = \frac{\mathcal{E}_t^{(\mathcal{N}+1)}\left(z^{(\mathcal{N})}\right)}{\mathcal{E}_i^{(0)}\left(z^{(0)}\right)} \\ &= \frac{2\left(\frac{\varepsilon^{(0)}}{\mu^{(0)}}\right)^{1/2}\cos\theta^{(0)}}{\left(\frac{\varepsilon^{(0)}}{\mu^{(0)}}\right)^{1/2}\cos\theta^{(0)}\Gamma_{11} + \Gamma_{21} + \left(\frac{\varepsilon^{(\mathcal{N}+1)}}{\mu^{(\mathcal{N}+1)}}\right)^{1/2}\cos\theta^{(\mathcal{N}+1)}\left[\left(\frac{\varepsilon^{(0)}}{\mu^{(0)}}\right)^{1/2}\cos\theta^{(0)}\Gamma_{12} + \Gamma_{22}\right]}. \end{aligned} \tag{3.9.20b}$$

S uvážením Poytingových vektorů dopadajících, odražených a procházejících vln dostaneme pro reflektivitu ${}^{\mathrm{TE}}\mathcal{R}$ a propustnost ${}^{\mathrm{TE}}\mathcal{T}$ multivrstvy

$${}^{\mathrm{TE}}\mathcal{R} = \left|{}^{\mathrm{TE}}r^{(0,\mathcal{N}+1)}\right|^2 \tag{3.9.21a}$$

$${}^{\mathrm{TE}}\mathcal{T} = \frac{\left(\frac{\varepsilon^{(\mathcal{N}+1)}}{\mu^{(\mathcal{N}+1)}}\right)^{1/2}\cos\theta^{(\mathcal{N}+1)}}{\left(\frac{\varepsilon^{(0)}}{\mu^{(0)}}\right)^{1/2}\cos\theta^{(0)}}\left|{}^{\mathrm{TE}}t^{(0,\mathcal{N}+1)}\right|^2. \tag{3.9.21b}$$

Volbou $\mathcal{N} = 0$ se problém multivstvy redukuje na problém rovinného rozhraní dvou poloprostorů. Potom $\Gamma_{11} = \Gamma_{22} = 1$ a $\Gamma_{12} = \Gamma_{21} = 0$. Dostáváme

$$
{}^{\mathrm{TE}}r^{(01)} \;=\; \frac{\left(\dfrac{\varepsilon^{(0)}}{\mu^{(0)}}\right)^{1/2} \cos\theta^{(0)} - \left(\dfrac{\varepsilon^{(1)}}{\mu^{(1)}}\right)^{1/2} \cos\theta^{(1)}}{\left(\dfrac{\varepsilon^{(0)}}{\mu^{(0)}}\right)^{1/2} \cos\theta^{(0)} + \left(\dfrac{\varepsilon^{(1)}}{\mu^{(1)}}\right)^{1/2} \cos\theta^{(1)}} \,. \tag{3.9.22a}
$$

$$
{}^{\mathrm{TE}}t^{(01)} \;=\; \frac{2\left(\dfrac{\varepsilon^{(0)}}{\mu^{(0)}}\right)^{1/2} \cos\theta^{(0)}}{\left(\dfrac{\varepsilon^{(0)}}{\mu^{(0)}}\right)^{1/2} \cos\theta^{(0)} + \left(\dfrac{\varepsilon^{(\mathcal{N}+1)}}{\mu^{(1)}}\right)^{1/2} \cos\theta^{(1)}} \,. \tag{3.9.22b}
$$

tj. Fresnelovy amplitudové reflexní a transmisní koeficienty pro jednoduché rozhraní a TE polarizaci.

3.9.2 TM polarizace

Nyní uvažujme rovinnou vlnu dopadající s TM polarizací na vrstevnaté prostředí ohraničené rovinami $z = z^{(0)}$ a $z = z^{(\mathcal{N})}$, $z^{(0)} < z^{(\mathcal{N})}$. $\varepsilon^{(0)}$ a $\mu^{(0)}$, resp. $\varepsilon^{(\mathcal{N})}$ a $\mu^{(\mathcal{N})}$. Najdeme vztahy pro amplitudy elektrických polí a irradiance odražených a procházejících vln. V TM polarizaci však musíme vyjít z magnetických polí vln. Nechť $H_i^{(0)}$, resp. $H_r^{(0)}$, a $H_t^{(\mathcal{N}+1)}$, označují obecně komplexní amplitudy magnetického pole dopadající, resp. odražené vlny v prostředí (0) a vlny procházející do prostředí $(\mathcal{N}+1)$.

Zkoumáme vliv požadavku spojitosti složek elektrických $\boldsymbol{E}$ a magnetických $\boldsymbol{H}$ polí rovnoběžných s rovinami rozhraní. Z Maxwellovy rovnice

$$
\nabla \times \boldsymbol{H} = \varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}
$$

pro pole úměrná $\exp\left[\mathrm{j}\left(\omega t - \gamma \cdot \boldsymbol{r}\right)\right]$ plyne

$$
\begin{aligned}
-\mathrm{j}\gamma \times \boldsymbol{H} &= \mathrm{j}\omega\varepsilon \boldsymbol{E} \\
-\gamma \times \boldsymbol{H} &= \omega\varepsilon \boldsymbol{E} \\
-\omega\left(\varepsilon\mu\right)^{1/2} \gamma \times \boldsymbol{H} &= \omega\varepsilon \boldsymbol{E}\,,
\end{aligned}
$$

tj.

$$
\boldsymbol{E} \;=\; -\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{1/2} \gamma \times \boldsymbol{H}\,, \tag{3.9.23}
$$

kde γ, je jednotkový vektor ve směru vektoru šíření γ.

Vynecháme faktor $\exp(\mathrm{j}\omega t)$ a zapíšeme elektrická a magnetická pole dopadající, odražené a procházející vlny. Magnetické pole dopadající vlny

$$\boldsymbol{H}_i^{(0)} = \hat{\boldsymbol{x}} H_{0i}^{(0)} \exp\left[-\mathrm{j}\left(\varepsilon^{(0)}\mu^{(0)}\right)^{1/2}\omega\left(\hat{\boldsymbol{y}}\sin\theta^{(0)} + \hat{\boldsymbol{z}}\cos\theta^{(0)}\right)\cdot(\hat{\boldsymbol{y}}y + \hat{\boldsymbol{z}}z)\right], \tag{3.9.24a}$$

magnetické pole odražené vlny

$$\boldsymbol{H}_r^{(0)} = \hat{\boldsymbol{x}} H_{0r}^{(0)} \exp\left[-\mathrm{j}\left(\varepsilon^{(0)}\mu^{(0)}\right)^{1/2}\omega\left(\hat{\boldsymbol{y}}\sin\theta^{(0)} - \hat{\boldsymbol{z}}\cos\theta^{(0)}\right)\cdot(\hat{\boldsymbol{y}}y + \hat{\boldsymbol{z}}z)\right], \tag{3.9.24b}$$

a magnetické pole vlny procházející

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}_t^{(\mathcal{N}+1)} &= \hat{\boldsymbol{x}} H_{0t}^{(\mathcal{N}+1)} \\ &\quad\times \exp\left[-\mathrm{j}\left(\varepsilon^{(\mathcal{N}+1)}\mu^{(\mathcal{N}+1)}\right)^{1/2}\omega\left(\hat{\boldsymbol{y}}\sin\theta^{(\mathcal{N}+1)} + \hat{\boldsymbol{z}}\cos\theta^{(\mathcal{N}+1)}\right)\cdot(\hat{\boldsymbol{y}}y + \hat{\boldsymbol{z}}z)\right].\end{aligned} \tag{3.9.24c}$$

Zde $H_{0i}^{(0)}$, $H_{0r}^{(0)}$ a $H_{0t}^{(0)}$ jsou skalární komplexní amplitudy magnetických polí (orientovaných ve směru x) vln v počátku souřadnic a času. S uvážením rovnice (3.8.4) dostaneme pro elektrické pole dopadající vlny

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_i^{(0)} &= -\left(\frac{\mu^{(0)}}{\varepsilon^{(0)}}\right)^{1/2}\gamma^{(0)}\times\boldsymbol{H}_i^{(0)} \\ &= -\left(\frac{\mu^{(0)}}{\varepsilon^{(0)}}\right)^{1/2}\left(\hat{\boldsymbol{y}}\sin\theta^{(0)} + \hat{\boldsymbol{z}}\cos\theta^{(0)}\right)\times\hat{\boldsymbol{x}}H_{0i}^{(0)} \\ &\quad\times\exp\left[-\mathrm{j}\left(\varepsilon^{(0)}\mu^{(0)}\right)^{1/2}\omega\left(y\sin\theta^{(0)} + z\cos\theta^{(0)}\right)\right] \\ &= H_{0i}^{(0)}\left(\frac{\mu^{(0)}}{\varepsilon^{(0)}}\right)^{1/2}\left(\hat{\boldsymbol{z}}\sin\theta^{(0)} - \hat{\boldsymbol{y}}\cos\theta^{(0)}\right) \\ &\quad\times\exp\left[-\mathrm{j}\left(\varepsilon^{(0)}\mu^{(0)}\right)^{1/2}\omega\left(y\sin\theta^{(0)} + z\cos\theta^{(0)}\right)\right],\end{aligned} \tag{3.9.24d}$$

pro elektrické pole odražené vlny

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_r^{(0)} &= -\left(\frac{\mu^{(0)}}{\varepsilon^{(0)}}\right)^{1/2}\gamma^{(0)}\times\boldsymbol{H}_r^{(0)} \\ &= -\left(\frac{\mu^{(0)}}{\varepsilon^{(0)}}\right)^{1/2}\left(\hat{\boldsymbol{y}}\sin\theta^{(0)} - \hat{\boldsymbol{z}}\cos\theta^{(0)}\right)\times\hat{\boldsymbol{x}}H_{0r}^{(0)} \\ &\quad\times\exp\left[-\mathrm{j}\left(\varepsilon^{(0)}\mu^{(0)}\right)^{1/2}\omega\left(y\sin\theta^{(0)} - z\cos\theta^{(0)}\right)\right] \\ &= H_{0r}^{(0)}\left(\frac{\mu^{(0)}}{\varepsilon^{(0)}}\right)^{1/2}\left(\hat{\boldsymbol{z}}\sin\theta^{(0)} + \hat{\boldsymbol{y}}\cos\theta^{(0)}\right) \\ &\quad\times\exp\left[-\mathrm{j}\left(\varepsilon^{(0)}\mu^{(0)}\right)^{1/2}\omega\left(y\sin\theta^{(0)} - z\cos\theta^{(0)}\right)\right],\end{aligned} \tag{3.9.24e}$$

pro elektrické pole vlny procházející

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_t^{(\mathcal{N}+1)} &= -\left(\frac{\mu^{(\mathcal{N}+1)}}{\varepsilon^{(\mathcal{N}+1)}}\right)^{1/2}\gamma^{(\mathcal{N}+1)}\times\boldsymbol{H}_t^{(\mathcal{N}+1)}\\ &= H_{0t}^{(\mathcal{N}+1)}\left(\frac{\mu^{(\mathcal{N}+1)}}{\varepsilon^{(\mathcal{N}+1)}}\right)^{1/2}\left(\hat{\boldsymbol{z}}\sin\theta^{(\mathcal{N}+1)}-\hat{\boldsymbol{y}}\cos\theta^{(\mathcal{N}+1)}\right)\\ &\quad\times\exp\left[-\mathrm{j}\left(\varepsilon^{(\mathcal{N}+1)}\mu^{(\mathcal{N}+1)}\right)^{1/2}\omega\left(y\sin\theta^{(\mathcal{N}+1)}+z\cos\theta^{(\mathcal{N}+1)}\right)\right],\end{aligned} \tag{3.9.24f}$$

Rovnice (3.9.24) odvozené z Maxwellových rovnic určují vzájemnou orientaci vektorů polí dopadajících, odražených a procházejících vln.[7] Uvážili jsme rovnice (3.2.45), z nichž plyne

$$\begin{aligned} H_x(y,z,t) &= \mathcal{H}_x(z)\exp\left[\mathrm{j}\left(\omega t\mp k_0N_y y\right)\right]. && (3.9.25a)\\ E_y(y,z,t) &= \mathcal{E}_y(z)\exp\left[\mathrm{j}\left(\omega t\mp k_0N_y y\right)\right] && (3.9.25b)\\ E_z(y,z,t) &= \mathcal{E}_z(z)\exp\left[\mathrm{j}\left(\omega t\mp k_0N_y y\right)\right], && (3.9.25c)\end{aligned}$$

Naší volbě kladné orientace složky vektoru šíření ($+\hat{\boldsymbol{y}}$) kolmé na osu vrstevnatého prostředí z odpovídá horní znaménko. Jednotkové vektory ve směrech vektorů šíření dopadající, odražené a procházející vlny jsou omezeny naší volbou roviny dopadu na rovinu kolmou na $\hat{\boldsymbol{x}}$ a jsou dány rovnicemi (3.9.2).

Celkové magnetické pole ve vstupním prostředí (0) má pro TM polarizaci pouze složku ve směru $\hat{\boldsymbol{x}}$ a tvoří jej superpozice polí dopadající vlny $\boldsymbol{H}_i^{(0)}\left(z^{(0)}\right)$ a odražené vlny $\boldsymbol{H}_r^{(0)}\left(z^{(0)}\right)$, daných rovnicemi (3.9.24a) a (3.9.24b). V rovině $z=z^{(0)}$

$$\begin{aligned}&\left[\boldsymbol{H}_i^{(0)}\left(z^{(0)}\right)+\boldsymbol{H}_r^{(0)}\left(z^{(0)}\right)\right]\cdot\hat{\boldsymbol{x}}\\ &\quad= \left\{H_{0i}^{(0)}\exp\left[-\mathrm{j}\left(\varepsilon^{(0)}\mu^{(0)}\right)^{1/2}\omega z^{(0)}\cos\theta^{(0)}\right]+H_{0r}^{(0)}\exp\left[\mathrm{j}\left(\varepsilon^{(0)}\mu^{(0)}\right)^{1/2}\omega z^{(0)}\cos\theta^{(0)}\right]\right\}\\ &\qquad\times\exp\left[-\mathrm{j}\left(\varepsilon^{(0)}\mu^{(0)}\right)^{1/2}\omega y\sin\theta^{(0)}\right]\\ &\quad= \mathcal{H}_x^{(0)}\left(z^{(0)}\right)\exp\left[-\mathrm{j}\left(\varepsilon^{(0)}\mu^{(0)}\right)^{1/2}\omega y\sin\theta^{(0)}\right],\end{aligned} \tag{3.9.26a}$$

Celkové magnetické pole ve výstupním prostředí $(\mathcal{N}+1)$ má pro TM polarizaci pouze složku ve směru $\hat{\boldsymbol{x}}$ a tvoří jej samotná procházející vlna, neboť přepokládáme, že amplituda vlny postupující z poloprostoru $z>z^{(\mathcal{N}+1)}$ k rozhraní $z=z^{(\mathcal{N})}$ je nulová.

[7]Při orientaci vektoru šíření dopadající vlny souhlasně s $+\hat{\boldsymbol{z}}$ $\theta^{(0)}=0$ a kladné orientaci pole $\boldsymbol{H}_i^{(0)}$ souhlasně s $+\hat{\boldsymbol{x}}$ odpovídá kladná orientace $\boldsymbol{E}_i^{(0)}$ orientaci $-\hat{\boldsymbol{y}}$ v souladu s rovnicí (3.9.24d). Avšak při orientaci vektoru šíření odražené vlny souhlasně s $-\hat{\boldsymbol{z}}$ $\theta^{(0)}=0$ a kladné orientaci pole $\boldsymbol{H}_r^{(0)}$ souhlasně s $+\hat{\boldsymbol{x}}$ odpovídá kladná orientace $\boldsymbol{E}_i^{(0)}$ orientace souhlasně s $+\hat{\boldsymbol{y}}$ v souladu s rovnicí (3.9.24e), *tedy opačně než u vlny dopadající*. Při orientaci vektoru šíření procházející vlny souhlasně s $+\hat{\boldsymbol{z}}$ $\theta^{(0)}=0$ a kladné orientaci pole $\boldsymbol{H}_t^{(\mathcal{N}+1)}$ souhlasně s $+\hat{\boldsymbol{x}}$ odpovídá kladná orientace $\boldsymbol{E}_t^{(\mathcal{N}+1)}$ orientaci $-\hat{\boldsymbol{y}}$ v souladu s rovnicí (3.9.3f) podobně jako u vlny dopadající.

V rovině $z = z^{(\mathcal{N})}$ máme

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{H}_t^{(\mathcal{N}+1)}\left(z^{(\mathcal{N})}\right) \cdot \hat{\boldsymbol{x}} &= H_{0t}^{(\mathcal{N}+1)} \\
&\times \exp\left[-\mathrm{j}\left(\varepsilon^{(\mathcal{N}+1)}\mu^{(\mathcal{N}+1)}\right)^{1/2}\omega\left(y\sin\theta^{(\mathcal{N}+1)} + z^{(\mathcal{N})}\cos\theta^{(\mathcal{N}+1)}\right)\right] \\
&= \mathcal{H}_x^{(\mathcal{N}+1)}\left(z^{(\mathcal{N})}\right)\exp\left[-\mathrm{j}\left(\varepsilon^{(\mathcal{N}+1)}\mu^{(\mathcal{N}+1)}\right)^{1/2}\omega y\sin\theta^{(\mathcal{N}+1)}\right]
\end{aligned} \tag{3.9.26b}$$

Složka celkového elektrického pole ve směru $\hat{\boldsymbol{y}}$ ve vstupním prostředí (0) v rovině $z = z^{(0)}$ je podle rovnic (3.9.24d) a (3.9.24d) dána superpozicí

$$\begin{aligned}
&\left[\boldsymbol{E}_i^{(0)}\left(z^{(0)}\right) + \boldsymbol{E}_r^{(0)}\left(z^{(0)}\right)\right] \cdot \hat{\boldsymbol{y}} \\
&= -\left(\frac{\mu^{(0)}}{\varepsilon^{(0)}}\right)^{1/2}\cos\theta^{(0)}\left\{H_{0i}^{(0)}\exp\left[-\mathrm{j}\left(\varepsilon^{(0)}\mu^{(0)}\right)^{1/2}\omega z^{(0)}\cos\theta^{(0)}\right]\right. \\
&- \left. H_{0r}^{(0)}\exp\left[\mathrm{j}\left(\varepsilon^{(0)}\mu^{(0)}\right)^{1/2}\omega z^{(0)}\cos\theta^{(0)}\right]\right\}\exp\left[-\mathrm{j}\left(\varepsilon^{(0)}\mu^{(0)}\right)^{1/2}\omega y\sin\theta^{(0)}\right] \\
&= \mathcal{E}_y^{(0)}\left(z^{(0)}\right)\exp\left[-\mathrm{j}\left(\varepsilon^{(0)}\mu^{(0)}\right)^{1/2}\omega y\sin\theta^{(0)}\right] ,
\end{aligned} \tag{3.9.26c}$$

Složka celkového elektrického pole ve směru $\hat{\boldsymbol{y}}$ ve výstupním prostředí $(\mathcal{N}+1)$ je tvořena samotnou procházející vlnou. V rovině $z = z^{(\mathcal{N})}$ máme

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_t^{(\mathcal{N}+1)}\left(z^{(\mathcal{N})}\right) \cdot \hat{\boldsymbol{y}} &= -\left(\frac{\mu^{(\mathcal{N}+1)}}{\varepsilon^{(\mathcal{N}+1)}}\right)^{1/2}\cos\theta^{(\mathcal{N}+1)}H_{0t}^{(\mathcal{N}+1)}\left(z^{(\mathcal{N})}\right) \\
&\times \exp\left[-\mathrm{j}\left(\varepsilon^{(\mathcal{N}+1)}\mu^{(\mathcal{N}+1)}\right)^{1/2}\omega\left(y\sin\theta^{(\mathcal{N}+1)} + z^{(\mathcal{N})}\cos\theta^{(\mathcal{N}+1)}\right)\right] \\
&= \mathcal{E}_y^{(\mathcal{N}+1)}\left(z^{(\mathcal{N})}\right)\exp\left[-\mathrm{j}\left(\varepsilon^{(\mathcal{N}+1)}\mu^{(\mathcal{N}+1)}\right)^{1/2}\omega y\sin\theta^{(\mathcal{N}+1)}\right]
\end{aligned} \tag{3.9.26d}$$

Označíme

$$\mathcal{H}_i^{(0)}\left(z^{(0)}\right) = H_{0i}^{(0)}\exp\left[-\mathrm{j}\left(\varepsilon^{(0)}\mu^{(0)}\right)^{1/2}\omega z^{(0)}\cos\theta^{(0)}\right] , \tag{3.9.27a}$$

$$\mathcal{H}_r^{(0)}\left(z^{(0)}\right) = H_{0r}^{(0)}\exp\left[\mathrm{j}\left(\varepsilon^{(0)}\mu^{(0)}\right)^{1/2}\omega z^{(0)}\cos\theta^{(0)}\right] , \tag{3.9.27b}$$

$$\mathcal{H}_t^{(\mathcal{N}+1)}\left(z^{(\mathcal{N})}\right) = H_{0t}^{(\mathcal{N}+1)}\exp\left[-\mathrm{j}\left(\varepsilon^{(\mathcal{N}+1)}\mu^{(\mathcal{N}+1)}\right)^{1/2}\omega z^{(\mathcal{N})}\cos\theta^{(\mathcal{N}+1)}\right] . \tag{3.9.27c}$$

Podmínky pro spojitost tečných složek polí pro rozhraní $z = z^{(0)}$

$$\mathcal{H}_x^{(0)}\left(z^{(0)}\right) = \mathcal{H}_x^{(1)}\left(z^{(0)}\right) , \tag{3.9.28a}$$

$$\mathcal{E}_y^{(0)}\left(z^{(0)}\right) = \mathcal{E}_y^{(1)}\left(z^{(0)}\right) , \tag{3.9.28b}$$

nebo maticově

$$\begin{pmatrix} \mathcal{H}_x^{(0)}\left(z^{(0)}\right) \\ -\mathcal{E}_y^{(0)}\left(z^{(0)}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{H}_x^{(1)}\left(z^{(0)}\right) \\ -\mathcal{E}_y^{(1)}\left(z^{(0)}\right) \end{pmatrix} . \tag{3.9.29}$$

Na rozhraní $z = z^{(\mathcal{N})}$ platí

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_x^{(\mathcal{N})}\left(z^{(\mathcal{N})}\right) &= \mathcal{H}_x^{(\mathcal{N}+1)}\left(z^{(\mathcal{N})}\right) , &(3.9.30a)\\ \mathcal{E}_y^{(\mathcal{N})}\left(z^{(\mathcal{N})}\right) &= \mathcal{E}_y^{(\mathcal{N}+1)}\left(z^{(\mathcal{N})}\right) , &(3.9.30b) \end{aligned}$$

nebo maticově

$$\begin{pmatrix} \mathcal{H}_x^{(\mathcal{N})}\left(z^{(\mathcal{N})}\right) \\ -\mathcal{E}_y^{(\mathcal{N})}\left(z^{(\mathcal{N})}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{H}_x^{(\mathcal{N}+1)}\left(z^{(\mathcal{N})}\right) \\ -\mathcal{E}_y^{(\mathcal{N}+1)}\left(z^{(\mathcal{N})}\right) \end{pmatrix} . \qquad (3.9.31)$$

Nyní můžeme podmínky pro rozhraní $z = z^{(0)}$ zapsat s uvážením rovnic (3.9.26), (3.9.27) a (3.9.28)

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_i^{(0)}\left(z^{(0)}\right) + \mathcal{H}_r^{(0)}\left(z^{(0)}\right) &= \mathcal{H}_x^{(1)}\left(z^{(0)}\right) , &(3.9.32a)\\ \left(\frac{\mu^{(0)}}{\varepsilon^{(0)}}\right)^{1/2} \cos\theta^{(0)} \left[\mathcal{H}_i^{(0)}\left(z^{(0)}\right) - \mathcal{H}_r^{(0)}\left(z^{(0)}\right)\right] &= -\mathcal{E}_y^{(1)}\left(z^{(0)}\right) , &(3.9.32b) \end{aligned}$$

pro rozhraní $z = z^{(\mathcal{N})}$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_t^{(\mathcal{N}+1)}\left(z^{(\mathcal{N})}\right) &= \mathcal{H}_x^{(\mathcal{N})}\left(z^{(\mathcal{N})}\right) , &(3.9.32c)\\ \left(\frac{\mu^{(\mathcal{N}+1)}}{\varepsilon^{(\mathcal{N}+1)}}\right)^{1/2} \cos\theta^{(\mathcal{N}+1)} \mathcal{H}_t^{(\mathcal{N}+1)}\left(z^{(\mathcal{N})}\right) &= -\mathcal{E}_y^{(\mathcal{N})}\left(z^{(\mathcal{N})}\right) . &(3.9.32d) \end{aligned}$$

Na pravých stranách rovnic vystupují složky sloupcových vektorů z rovnic (3.8.2). V maticové vyjádření

$$\begin{pmatrix} \mathcal{H}_x^{(1)}\left(z^{(0)}\right) \\ -\mathcal{E}_y^{(1)}\left(z^{(0)}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \left(\frac{\mu^{(0)}}{\varepsilon^{(0)}}\right)^{1/2} \cos\theta^{(0)} & -\left(\frac{\mu^{(0)}}{\varepsilon^{(0)}}\right)^{1/2} \cos\theta^{(0)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{H}_i^{(0)}\left(z^{(0)}\right) \\ \mathcal{H}_r^{(0)}\left(z^{(0)}\right) \end{pmatrix} , \qquad (3.9.33a)$$

$$\begin{pmatrix} \mathcal{H}_x^{(\mathcal{N})}\left(z^{(\mathcal{N})}\right) \\ -\mathcal{E}_y^{(\mathcal{N})}\left(z^{(\mathcal{N})}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \left(\frac{\mu^{(\mathcal{N}+1)}}{\varepsilon^{(\mathcal{N}+1)}}\right)^{1/2} \cos\theta^{(\mathcal{N}+1)} & -\left(\frac{\mu^{(\mathcal{N}+1)}}{\varepsilon^{(\mathcal{N}+1)}}\right)^{1/2} \cos\theta^{(\mathcal{N}+1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{H}_t^{(\mathcal{N}+1)}\left(z^{(\mathcal{N})}\right) \\ 0 \end{pmatrix} . \qquad (3.9.33b)$$

Inverzí rovnice (3.9.33a)

$$\begin{pmatrix} \mathcal{H}_i^{(0)}\left(z^{(0)}\right) \\ \mathcal{H}_r^{(0)}\left(z^{(0)}\right) \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{2\cos\theta^{(0)}}\left(\frac{\varepsilon^{(0)}}{\mu^{(0)}}\right)^{1/2} \begin{pmatrix} \left(\frac{\mu^{(0)}}{\varepsilon^{(0)}}\right)^{1/2}\cos\theta^{(0)} & 1 \\ \left(\frac{\mu^{(0)}}{\varepsilon^{(0)}}\right)^{1/2}\cos\theta^{(0)} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{H}_x^{(1)}\left(z^{(0)}\right) \\ -\mathcal{E}_y^{(1)}\left(z^{(0)}\right) \end{pmatrix}, \tag{3.9.34}$$

S ohledem na značení v rovnici (3.8.4) charakteristickou matici multivrstvy pro TM polarizaci zapíšeme

$$^{\mathrm{TM}}\Gamma = \prod_{n=1}^{\mathcal{N}} {}^{\mathrm{TM}}\mathbf{S}^{(n)} = {}^{\mathrm{TM}}\mathbf{S}^{(1)}\ {}^{\mathrm{TM}}\mathbf{S}^{(2)} \ldots {}^{\mathrm{TM}}\mathbf{S}^{(n)} \ldots {}^{\mathrm{TM}}\mathbf{S}^{(\mathcal{N})} = \begin{pmatrix} \Gamma_{33} & \Gamma_{34} \\ \Gamma_{43} & \Gamma_{44} \end{pmatrix}. \tag{3.9.35}$$

S její pomocí můžeme vztah mezi amplitudami magnetických polí dopadající, odražené a procházející vlny vyjádřit jako

$$\begin{pmatrix} \mathcal{H}_i^{(0)}\left(z^{(0)}\right) \\ \mathcal{H}_r^{(0)}\left(z^{(0)}\right) \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{2\cos\theta^{(0)}}\left(\frac{\varepsilon^{(0)}}{\mu^{(0)}}\right)^{1/2} \begin{pmatrix} \left(\frac{\mu^{(0)}}{\varepsilon^{(0)}}\right)^{1/2}\cos\theta^{(0)} & 1 \\ \left(\frac{\mu^{(0)}}{\varepsilon^{(0)}}\right)^{1/2}\cos\theta^{(0)} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{33} & \Gamma_{34} \\ \Gamma_{43} & \Gamma_{44} \end{pmatrix}$$
$$\times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \left(\frac{\mu^{(\mathcal{N}+1)}}{\varepsilon^{(\mathcal{N}+1)}}\right)^{1/2}\cos\theta^{(\mathcal{N}+1)} & -\left(\frac{\mu^{(\mathcal{N}+1)}}{\varepsilon^{(\mathcal{N}+1)}}\right)^{1/2}\cos\theta^{(\mathcal{N}+1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{H}_t^{(\mathcal{N}+1)}\left(z^{(\mathcal{N})}\right) \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{3.9.36}$$

Po vynásobení

$$\begin{pmatrix} \mathcal{H}_i^{(0)}\left(z^{(0)}\right) \\ \\ \mathcal{H}_r^{(0)}\left(z^{(0)}\right) \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{2\cos\theta^{(0)}}\left(\frac{\varepsilon^{(0)}}{\mu^{(0)}}\right)^{1/2} \begin{pmatrix} \left(\frac{\mu^{(0)}}{\varepsilon^{(0)}}\right)^{1/2}\cos\theta^{(0)}\Gamma_{33} + \Gamma_{43} & \left(\frac{\mu^{(0)}}{\varepsilon^{(0)}}\right)^{1/2}\cos\theta^{(0)}\Gamma_{34} + \Gamma_{44} \\ \\ \left(\frac{\mu^{(0)}}{\varepsilon^{(0)}}\right)^{1/2}\cos\theta^{(0)}\Gamma_{33} - \Gamma_{43} & \left(\frac{\mu^{(0)}}{\varepsilon^{(0)}}\right)^{1/2}\cos\theta^{(0)}\Gamma_{34} - \Gamma_{44} \end{pmatrix}$$
$$\times \begin{pmatrix} 1 \\ \left(\frac{\mu^{(\mathcal{N}+1)}}{\varepsilon^{(\mathcal{N}+1)}}\right)^{1/2}\cos\theta^{(\mathcal{N}+1)} \end{pmatrix} \mathcal{H}_t^{(\mathcal{N}+1)}\left(z^{(\mathcal{N})}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\mathcal{H}_t^{(\mathcal{N}+1)}\left(z^{(\mathcal{N})}\right)}{2\cos\theta^{(0)}}\left(\frac{\varepsilon^{(0)}}{\mu^{(0)}}\right)^{1/2} \\
&\times \begin{pmatrix} \left(\frac{\mu^{(0)}}{\varepsilon^{(0)}}\right)^{1/2}\cos\theta^{(0)}\Gamma_{33}+\Gamma_{43}+\left(\frac{\mu^{(\mathcal{N}+1)}}{\varepsilon^{(\mathcal{N}+1)}}\right)^{1/2}\cos\theta^{(\mathcal{N}+1)}\left[\left(\frac{\mu^{(0)}}{\varepsilon^{(0)}}\right)^{1/2}\cos\theta^{(0)}\Gamma_{43}+\Gamma_{44}\right] \\ \left(\frac{\mu^{(0)}}{\varepsilon^{(0)}}\right)^{1/2}\cos\theta^{(0)}\Gamma_{33}-\Gamma_{43}+\left(\frac{\mu^{(\mathcal{N}+1)}}{\varepsilon^{(\mathcal{N}+1)}}\right)^{1/2}\cos\theta^{(\mathcal{N}+1)}\left[\left(\frac{\mu^{(0)}}{\varepsilon^{(0)}}\right)^{1/2}\cos\theta^{(0)}\Gamma_{34}-\Gamma_{44}\right] \end{pmatrix} .
\end{aligned}
\tag{3.9.37}
$$

Vztahy mezi dopadající vlnou a vlnou odraženou a procházející jsme vyjádřili pomocí amplitud magnetických polí TM vln. Globální reflexní a transmisní amplitudové koeficienty však obvykle definujeme jako poměry amplitud celkových elektrických polí vln polarizovaných v rovině dopadu. Z rovnice (3.9.1) získáme skalární vztahy

$$
\mathcal{H}_i^{(0)}\left(z^{(0)}\right) = \left(\frac{\varepsilon^{(0)}}{\mu^{(0)}}\right)^{1/2} {}^{\mathrm{TM}}\mathcal{E}_i^{(0)}\left(z^{(0)}\right) , \tag{3.9.38a}
$$

$$
\mathcal{H}_r^{(0)}\left(z^{(0)}\right) = \left(\frac{\varepsilon^{(0)}}{\mu^{(0)}}\right)^{1/2} {}^{\mathrm{TM}}\mathcal{E}_r^{(0)}\left(z^{(0)}\right) , \tag{3.9.38b}
$$

$$
\mathcal{H}_t^{(\mathcal{N}+1)}\left(z^{(\mathcal{N})}\right) = \left(\frac{\varepsilon^{(\mathcal{N}+1)}}{\mu^{(\mathcal{N}+1)}}\right)^{1/2} {}^{\mathrm{TM}}\mathcal{E}_t^{(\mathcal{N}+1)}\left(z^{(\mathcal{N})}\right) . \tag{3.9.38c}
$$

Po dosazení do rovnice (3.9.36)

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} {}^{\mathrm{TM}}\mathcal{E}_i^{(0)}\left(z^{(0)}\right) \\ {}^{\mathrm{TM}}\mathcal{E}_r^{(0)}\left(z^{(0)}\right) \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2\cos\theta^{(0)}}\left(\frac{\mu^{(0)}}{\varepsilon^{(0)}}\right)^{1/2} \begin{pmatrix} \cos\theta^{(0)} & \left(\frac{\varepsilon^{(0)}}{\mu^{(0)}}\right)^{1/2} \\ \cos\theta^{(0)} & -\left(\frac{\varepsilon^{(0)}}{\mu^{(0)}}\right)^{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{33} & \Gamma_{34} \\ \Gamma_{43} & \Gamma_{44} \end{pmatrix} \\
&\times \begin{pmatrix} \left(\frac{\varepsilon^{(\mathcal{N}+1)}}{\mu^{(\mathcal{N}+1)}}\right)^{1/2} & \left(\frac{\varepsilon^{(\mathcal{N}+1)}}{\mu^{(\mathcal{N}+1)}}\right)^{1/2} \\ \cos\theta^{(\mathcal{N}+1)} & -\cos\theta^{(\mathcal{N}+1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^{\mathrm{TM}}\mathcal{E}_t^{(\mathcal{N}+1)}\left(z^{(\mathcal{N})}\right) \\ 0 \end{pmatrix} .
\end{aligned}
\tag{3.9.39}
$$

Globální reflexní amplitudový koeficient multivrstvy ${}^{\mathrm{TM}}r^{(0,\mathcal{N}+1)}$ obklopené poloprostory (0) a $(\mathcal{N}+1)$ je definován jako poměr amplitud elektrického pole odražené a dopadající vlny

$$
\begin{aligned}
{}^{\mathrm{TM}}r^{(0,\mathcal{N}+1)} &= \frac{{}^{\mathrm{TM}}\mathcal{H}_r^{(0)}\left(z^{(0)}\right)}{{}^{\mathrm{TM}}\mathcal{H}_i^{(0)}\left(z^{(0)}\right)} = \frac{{}^{\mathrm{TM}}\mathcal{E}_r^{(0)}\left(z^{(0)}\right)}{{}^{\mathrm{TM}}\mathcal{E}_i^{(0)}\left(z^{(0)}\right)} \\
&= \frac{\left(\frac{\mu^{(0)}}{\varepsilon^{(0)}}\right)^{1/2}\cos\theta^{(0)}\Gamma_{33} - \Gamma_{43} + \left(\frac{\mu^{(\mathcal{N}+1)}}{\varepsilon^{(\mathcal{N}+1)}}\right)^{1/2}\cos\theta^{(\mathcal{N}+1)}\left[\left(\frac{\mu^{(0)}}{\varepsilon^{(0)}}\right)^{1/2}\cos\theta^{(0)}\Gamma_{34} - \Gamma_{44}\right]}{\left(\frac{\mu^{(0)}}{\varepsilon^{(0)}}\right)^{1/2}\cos\theta^{(0)}\Gamma_{33} + \Gamma_{43} + \left(\frac{\mu^{(\mathcal{N}+1)}}{\varepsilon^{(\mathcal{N}+1)}}\right)^{1/2}\cos\theta^{(\mathcal{N}+1)}\left[\left(\frac{\mu^{(0)}}{\varepsilon^{(0)}}\right)^{1/2}\cos\theta^{(0)}\Gamma_{34} + \Gamma_{44}\right]} .
\end{aligned}
\tag{3.9.40a}
$$

Odpovídající globální transmisní amplitudový koeficient multivrstvy ${}^{\mathrm{TM}}t^{(0,\mathcal{N}+1)}$ obklopené poloprostory (0) a $(\mathcal{N}+1)$ je definován jako poměr amplitud elektrického pole procházející vlny a vlny dopadající

$$
\begin{aligned}
{}^{\mathrm{TM}}t^{(0,\mathcal{N}+1)} &= \frac{{}^{\mathrm{TM}}\mathcal{E}_t^{(\mathcal{N}+1)}\left(z^{(\mathcal{N})}\right)}{{}^{\mathrm{TM}}\mathcal{E}_i^{(0)}\left(z^{(0)}\right)} \\
&= \frac{\left(\frac{\mu^{(\mathcal{N}+1)}}{\varepsilon^{(\mathcal{N}+1)}}\right)^{1/2}}{\left(\frac{\mu^{(0)}}{\varepsilon^{(0)}}\right)^{1/2}} \frac{{}^{\mathrm{TM}}\mathcal{H}_t^{(\mathcal{N}+1)}\left(z^{(\mathcal{N})}\right)}{{}^{\mathrm{TM}}\mathcal{H}_i^{(0)}\left(z^{(0)}\right)} = \left(\frac{\varepsilon^{(0)}\mu^{(\mathcal{N}+1)}}{\mu^{(0)}\varepsilon^{(\mathcal{N}+1)}}\right)^{1/2} \frac{\mathcal{H}_t^{(\mathcal{N}+1)}\left(z^{(\mathcal{N})}\right)}{\mathcal{H}_i^{(0)}\left(z^{(0)}\right)}
\end{aligned}
$$

tj.

$$
{}^{\mathrm{TM}}t^{(0,\mathcal{N}+1)} = \frac{2\left(\frac{\mu^{(\mathcal{N}+1)}}{\varepsilon^{(\mathcal{N}+1)}}\right)^{1/2}\cos\theta^{(0)}}{\left(\frac{\mu^{(0)}}{\varepsilon^{(0)}}\right)^{1/2}\cos\theta^{(0)}\Gamma_{33} + \Gamma_{43} + \left(\frac{\mu^{(\mathcal{N}+1)}}{\varepsilon^{(\mathcal{N}+1)}}\right)^{1/2}\cos\theta^{(\mathcal{N}+1)}\left[\left(\frac{\mu^{(0)}}{\varepsilon^{(0)}}\right)^{1/2}\cos\theta^{(0)}\Gamma_{34} + \Gamma_{44}\right]} .
\tag{3.9.40b}
$$

S uvážením Poytingových vektorů dopadajících, odražených a procházejících vln dostaneme pro reflektivitu ${}^{\mathrm{TM}}\mathcal{R}$ resp. pro propustnost multivrstvy ${}^{\mathrm{TM}}\mathcal{T}$

$$
{}^{\mathrm{TM}}\mathcal{R} = \left|{}^{\mathrm{TM}}r^{(0,\mathcal{N}+1)}\right|^2
\tag{3.9.41a}
$$

resp.

$$
{}^{\mathrm{TM}}\mathcal{T} = \frac{\left(\frac{\mu^{(0)}}{\varepsilon^{(0)}}\right)^{1/2}\cos\theta^{(\mathcal{N}+1)}}{\left(\frac{\mu^{(\mathcal{N}+1)}}{\varepsilon^{(\mathcal{N}+1)}}\right)^{1/2}\cos\theta^{(0)}} \left|{}^{\mathrm{TM}}t^{(0,\mathcal{N}+1)}\right|^2 .
\tag{3.9.41b}
$$

Při výpočtu reflexního a transmisního koeficientu multivrstvy jsme použili rovnici (3.9.36) až (3.9.39).

Volbou $\mathcal{N} = 0$ se problém multivstvy redukuje na problém rovinného rozhraní dvou poloprostorů. Potom $\Gamma_{33} = \Gamma_{44} = 1$ a $\Gamma_{34} = \Gamma_{43} = 0$. Dostáváme

$$ {}^{\mathrm{TM}}r^{(01)} = \frac{\left(\dfrac{\mu^{(0)}}{\varepsilon^{(0)}}\right)^{1/2} \cos\theta^{(0)} - \left(\dfrac{\mu^{(1)}}{\varepsilon^{(1)}}\right)^{1/2} \cos\theta^{(1)}}{\left(\dfrac{\mu^{(0)}}{\varepsilon^{(0)}}\right)^{1/2} \cos\theta^{(0)} + \left(\dfrac{\mu^{(1)}}{\varepsilon^{(1)}}\right)^{1/2} \cos\theta^{(1)}}, \tag{3.9.42a} $$

$$ \begin{aligned} {}^{\mathrm{TM}}t^{(01)} &= \frac{2\left(\dfrac{\mu^{(1)}}{\varepsilon^{(1)}}\right)^{1/2} \cos\theta^{(0)}}{\left(\dfrac{\mu^{(0)}}{\varepsilon^{(0)}}\right)^{1/2} \cos\theta^{(0)} + \left(\dfrac{\mu^{(1)}}{\varepsilon^{(1)}}\right)^{1/2} \cos\theta^{(1)}} \\ &= \frac{2\left(\dfrac{\varepsilon^{(0)}}{\mu^{(0)}}\right)^{1/2} \cos\theta^{(0)}}{\left(\dfrac{\varepsilon^{(1)}}{\mu^{(1)}}\right)^{1/2} \cos\theta^{(0)} + \left(\dfrac{\varepsilon^{(0)}}{\mu^{(0)}}\right)^{1/2} \cos\theta^{(1)}}. \end{aligned} \tag{3.9.42b} $$

tj. Fresnelovy amplitudové reflexní a transmisní koeficienty pro jednoduché rozhraní a TM polarizaci.

3.10 Lokálně periodické izotropní multivrstvy

Periodické vrstevnaté prostředí

$$\varepsilon(z+lh) = \varepsilon(z) , \tag{3.10.1}$$

$$\mu(z+lh) = \mu(z) , \tag{3.10.2}$$

kde h je perioda a l je celé.

Charakteristická matice úseku jedné periody

$$\mathbf{M}(h) = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \tag{3.10.3}$$

Potom

$$[\mathbf{M}(h)]^{\mathcal{N}} = \mathbf{M}(h)\,\mathbf{M}(h)\,\mathbf{M}(h)\ldots\mathbf{M}(h) . \tag{3.10.4}$$

Pro matice splňující

$$m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21} = 1 \tag{3.10.5}$$

lze jejich mocninu vyjádřit pomocí Čebyševových polynomů druhého druhu $\mathcal{U}_q$ řádu q (q je celé nezáporné)

$$[\mathbf{M}(h)]^{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}^{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} m_{11}\mathcal{U}_{\mathcal{N}-1}(a) - \mathcal{U}_{\mathcal{N}-2}(a) & m_{12}\mathcal{U}_{\mathcal{N}-1}(a) \\ m_{21}\mathcal{U}_{\mathcal{N}-1}(a) & m_{22}\mathcal{U}_{\mathcal{N}-1}(a) - \mathcal{U}_{\mathcal{N}-2}(a) \end{pmatrix} , \tag{3.10.6}$$

kde

$$a = \frac{1}{2}(m_{11} + m_{22}) . \tag{3.10.7}$$

Pro periodu tvořenou symetrickým úsekem

$$a = m_{11} = m_{22} . \tag{3.10.8}$$

Tuto vlastnost symetrie úseku délky jedné periody můžeme ilustrovat případem homogenní vrstvy (1) tloušťky $d^{(1)}$ rozdělené na dvě stejné části, mezi něž je vložena homogenní vrstva (2) tloušťky $d^{(2)}$. Potom $h = d^{(1)} + d^{(2)}$ a charakteristická matice tohoto sendviče je dána

$$\mathbf{M}(h) = \mathbf{M}\left(d^{(1)}/2\right)\mathbf{M}\left(d^{(2)}/2\right)\mathbf{M}\left(d^{(2)}/2\right)\mathbf{M}\left(d^{(1)}/2\right) \tag{3.10.9}$$

Označíme $p^{(l)} = \left(Y^{(l)}\cos\theta^{(l)}\right)$ $(l = 1{,}2)$ v případě TE a $p^{(l)} = \left(Z^{(l)}\cos\theta^{(l)}\right)$ $(l = 1{,}2)$ v případě TM. Součin $\mathbf{M}\left(d^{(1)}/2\right)\mathbf{M}\left(d^{(2)}/2\right)$ pak můžeme psát

$$\mathbf{M}\left(d^{(1)}/2\right)\mathbf{M}\left(d^{(2)}/2\right) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\beta^{(1)}}{2} & \mathrm{j}\frac{1}{p^{(1)}}\sin\frac{\beta^{(1)}}{2} \\ \mathrm{j}p^{(1)}\sin\frac{\beta^{(1)}}{2} & \cos\frac{\beta^{(1)}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\frac{\beta^{(2)}}{2} & \mathrm{j}\frac{1}{p^{(2)}}\sin\frac{\beta^{(2)}}{2} \\ \mathrm{j}p^{(2)}\sin\frac{\beta^{(2)}}{2} & \cos\frac{\beta^{(2)}}{2} \end{pmatrix}$$

$$
= \begin{pmatrix} \cos\frac{\beta^{(1)}}{2}\cos\frac{\beta^{(2)}}{2} - \frac{p^{(1)}}{p^{(2)}}\sin\frac{\beta^{(1)}}{2}\sin\frac{\beta^{(2)}}{2} & \mathrm{j}\frac{1}{p^{(1)}}\sin\frac{\beta^{(1)}}{2}\cos\frac{\beta^{(2)}}{2} + \mathrm{j}\frac{1}{p^{(2)}}\sin\frac{\beta^{(2)}}{2}\cos\frac{\beta^{(1)}}{2} \\ \mathrm{j}p^{(1)}\sin\frac{\beta^{(1)}}{2}\cos\frac{\beta^{(2)}}{2} + \mathrm{j}p^{(2)}\sin\frac{\beta^{(2)}}{2}\cos\frac{\beta^{(1)}}{2} & \cos\frac{\beta^{(1)}}{2}\cos\frac{\beta^{(2)}}{2} - \frac{p^{(2)}}{p^{(1)}}\sin\frac{\beta^{(1)}}{2}\sin\frac{\beta^{(2)}}{2} \end{pmatrix} \tag{3.10.10}
$$

Součin $\mathbf{M}\left(d^{(2)}/2\right)\mathbf{M}\left(d^{(1)}/2\right)$ dostaneme záměnou indexů $1 \leftrightarrow 2$ v součinu $\mathbf{M}\left(d^{(1)}/2\right)\mathbf{M}\left(d^{(2)}/2\right)$

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{M}\left(d^{(2)}/2\right)\mathbf{M}\left(d^{(1)}/2\right) \\
&= \begin{pmatrix} \cos\frac{\beta^{(1)}}{2}\cos\frac{\beta^{(2)}}{2} - \frac{p^{(2)}}{p^{(1)}}\sin\frac{\beta^{(1)}}{2}\sin\frac{\beta^{(2)}}{2} & \mathrm{j}\frac{1}{p^{(1)}}\sin\frac{\beta^{(1)}}{2}\cos\frac{\beta^{(2)}}{2} + \mathrm{j}\frac{1}{p^{(2)}}\sin\frac{\beta^{(2)}}{2}\cos\frac{\beta^{(1)}}{2} \\ \mathrm{j}p^{(1)}\sin\frac{\beta^{(1)}}{2}\cos\frac{\beta^{(2)}}{2} + \mathrm{j}p^{(2)}\sin\frac{\beta^{(2)}}{2}\cos\frac{\beta^{(1)}}{2} & \cos\frac{\beta^{(1)}}{2}\cos\frac{\beta^{(2)}}{2} - \frac{p^{(1)}}{p^{(2)}}\sin\frac{\beta^{(1)}}{2}\sin\frac{\beta^{(2)}}{2} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{3.10.11}
$$

Zjišťujeme, že součin $\mathbf{M}\left(d^{(2)}/2\right)\mathbf{M}\left(d^{(1)}/2\right)$ se liší od součinu $\mathbf{M}\left(d^{(1)}/2\right)\mathbf{M}\left(d^{(2)}/2\right)$ jen pořadím prvků na hlavní diagonále. Matice $\mathbf{M}(h)$ má tedy následující strukturu

$$
\begin{aligned}
\mathbf{M}(h) &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{22} & a_{12} \\ a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21} & 2a_{11}a_{12} \\ 2a_{21}a_{22} & a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{11} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{3.10.12}
$$

Čebyševovy polynomy druhého druhu

$$
\begin{aligned}
\mathcal{U}_0 &= 0, && (3.10.13a)\\
\mathcal{U}_1 &= 1, && (3.10.13b)\\
\mathcal{U}_2 &= 2a, && (3.10.13c)\\
\mathcal{U}_3 &= 4a^2 - 1, && (3.10.13d)\\
\mathcal{U}_4 &= 8a^3 - 4a, && (3.10.13e)\\
\mathcal{U}_5 &= 16a^4 - 12a^2 + 1, && (3.10.13f)\\
\mathcal{U}_6 &= 32a^5 - 32a^3 + 6a, && (3.10.13g)\\
\mathcal{U}_7 &= 64a^6 - 80a^4 + 24a^2 - 1, && (3.10.13h)\\
\mathcal{U}_8 &= 128a^7 - 192a^5 + 80a^3 - 8a, && (3.10.13i)\\
\mathcal{U}_9 &= 256a^8 - 448a^6 + 240a^4 - 40a^2 + 1, && (3.10.13j)\\
\mathcal{U}_{10} &= 512a^9 - 1024a^7 + 672a^5 - 160a^3 + 10a, && (3.10.13k)
\end{aligned}
$$

Vyšší řády plynou z rekurentního vztahu ($q\ \ 0$):

$$
\mathcal{U}_{q+1}(a) = 2a\mathcal{U}_q(a) - \mathcal{U}_{q-1}(a) \tag{3.10.14}
$$

Literatura ke kapitole 3

[1] F. Abelès, "Recherches sur la propagation des ondes électromagnétiques sinusoïdales dans les milieux stratifiés. Application aux couches minces," Ann. Phys. Paris **5**, 596–640 (1950),

[2] Max Born & Emil Wolf with contributions by A. B. Bhatia, P. C. Clemmow, D. Gabor, A. R. Stokes, A. M. Taylor, P. A. Wayman and W. L. Wilcock: *Principles of Optics, Electromagnetic Theory of Propagation Interference and Diffraction of Light*, Sixth (Corrected) Edition, Cambridge University Press 1997.

[3] George B. Arfken and Hans J. Weber, *Mathematical Methods For Physicists*, Academic Press.

[4] Mary L. Boas, *Mathematical Methods in the Physical Sciences*, 3rd Edition, John Wiley & Sons, 2006, Kapitola 12.