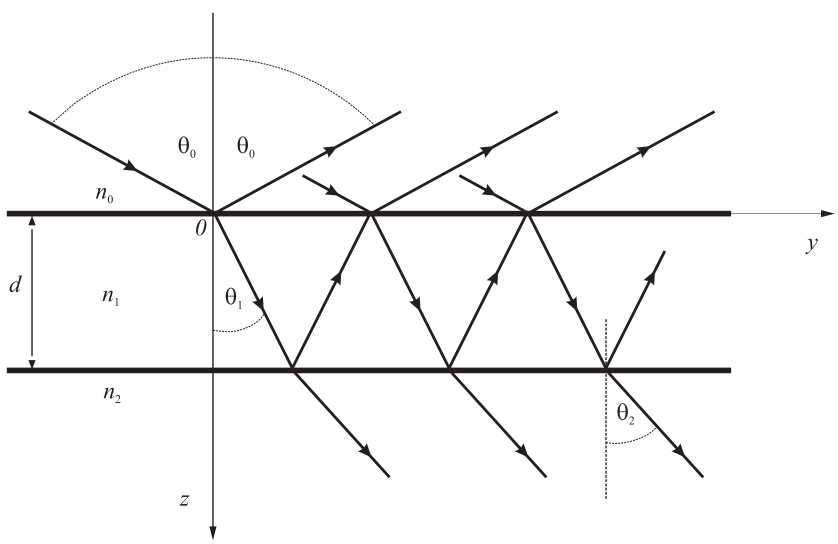
Kapitola 2

Izotropní multivrstvy

2.1 Mnohanásobné odrazy v tenké vrstvě

Uvažujeme rovinnou homogenní tenkou vrstvu (1) obklopenou dvěma poloprostory, vstupním prostředím (0), např. vzduchem, a výstupním prostředím (2), např. podložkou. Všechna prostředí budeme pro začátek pokládat za lineární, homogenní, izotropní, neabsorbující (ideálně dielektrická), nemagnetická a elektricky neutrální (s nulovou makroskopickou nábojovou hustotou). Vstupní prostředí charakterizuje reálný index lomu n_0 vrstvu n_1 a výstupní prostředí n_2. Rovinná mo-



Obr. 2.1: Mnohonásobné odrazy v tenké vrstvě.

nochromatická vlna o úhlové frekvenci ω dopadající ze vstupního neabsorbujícího prostředí (0) na planparalelní neabsorbující tenkou vrstvu (1) pod úhlem θ_0 vytváří ve vrstvě rovinné vlny lomené pod úhlem θ_1 a rovinné vlny procházející do výstupního neabsorbujícího prostředí (2) pod úhlem θ_2 [1]. Kartézský souřadný systém zvolíme podle obrázku (2.1) s osou z kolmou k rozhraním a s osou x kolmou na rovinu dopadu yz. Elektrická pole vln v j-tém prostředí $\boldsymbol{E}^{(j)}$ jsou obecně popsána exponenciálními faktory

$$\boldsymbol{E}^{(j)} \sim \exp\left[-\mathrm{j}\left(\boldsymbol{k}_j \cdot \boldsymbol{r} - \omega t\right)\right] \quad = \quad \exp\left[-\mathrm{j}\frac{n_j\omega}{c}\left(y\sin\theta_j \pm z\cos\theta_j\right)\right]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}, \tag{2.1.1}$$

kde $j = 0{,}1{,}2$. Vektory šíření jsou dány $\boldsymbol{k}_j = \dfrac{n_j\omega}{c}\left(\hat{\boldsymbol{y}}\sin\theta_j \pm \hat{\boldsymbol{z}}\cos\theta_j\right)$, kde c je fázová rychlost elektromagnetických vln ve vakuu. Jejich normálové složky mění po každém odrazu na rozhraních znaménko. Pro jednoduchost předpokládáme, že v prostředí (2) je pouze vlna postupující od rozhraní $1-2$. Ve všech třech prostředích současně je splněn Snellův zákon (zákon zachování tečných složek vektorů šíření)

$$n_0\sin\theta_0 = n_1\sin\theta_1 = n_2\sin\theta_2. \tag{2.1.2}$$

Faktor $\exp\left[-\mathrm{j}\dfrac{n_j\omega}{c}\left(y\sin\theta_j\right)\right]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ je díky Snellovu zákonu pro celou strukturu invariantní. Vlna s definovanou lineární polarizací buď kolmou nebo rovnoběžnou vůči rovině dopadu v prostředí vrstvy (1) se mnohanásobně odráží. Poměr odražené a dopadající amplitudy elektrického pole vln ve vstupním prostředí (0) lze psát jako

$$\begin{aligned}\frac{E_r^{(0)}}{E_i^{(0)}} &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (2.1.3)\\ &= r_{01} + \left[t_{01}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\kappa d}r_{12}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\kappa d}t_{10} + t_{01}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\kappa d}r_{12}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\kappa d}r_{10}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\kappa d}r_{12}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\kappa d}t_{10} + \cdots\right],\end{aligned}$$

kde

$$\kappa d = \frac{n_1\omega}{c}d\cos\theta_1$$

a d je tloušťka vrstvy (1). Fresnelovy amplitudové reflexní a transmisni koeficienty pro individuální rozhraní mezi nemagnetickými prostředími (k) a (l) jsou definovány v souladu s rovnicemi plynoucími z okrajových podmínek pro elektrická pole kolmá k rovině dopadu

$$r_{kl}^{(s)} = \left(\frac{E_r^{(k)}}{E_i^{(k)}}\right)_{\perp} = \frac{n_k\cos\theta_k - n_l\cos\theta_l}{n_k\cos\theta_k + n_l\cos\theta_l} \tag{2.1.4a}$$

$$t_{kl}^{(s)} = \left(\frac{E_t^{(l)}}{E_i^{(k)}}\right)_{\perp} = \frac{2n_k\cos\theta_k}{n_k\cos\theta_k + n_l\cos\theta_l}. \tag{2.1.4b}$$

a pro elektrická pole rovnoběžná s rovinou dopadu rovnicemi

$$r_{kl}^{(p)} = \left(\frac{E_r^{(k)}}{E_i^{(k)}}\right)_{\parallel} = \frac{n_k\cos\theta_l - n_l\cos\theta_k}{n_k\cos\theta_l + n_l\cos\theta_k} \tag{2.1.5a}$$

$$t_{kl}^{(p)} = \left(\frac{E_t^{(l)}}{E_i^{(k)}}\right)_{\parallel} = \frac{2n_k\cos\theta_k}{n_l\cos\theta_k + n_k\cos\theta_l} \tag{2.1.5b}$$

K označení polarizace elektrického pole kolmé $\perp$, resp. rovnoběžné $\parallel$ vzhledem k rovině dopadu jsme použili, jak je zvykem, písmena s (z německého *senkrecht*, kolmé, zde k rovině dopadu) pro TE (transverzálně elektrickou) vlnu, resp. p (paralelní vůči rovině dopadu) pro TM (transverzálně magnetickou) vlnu. Výraz v hranaté závorce rovnice (2.1.3) je konvergentní geometrická řada

$$\frac{E_r^{(0)}}{E_i^{(0)}} = r_{01} + t_{01}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\kappa d} r_{12}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\kappa d} t_{10}\left[1 + r_{10}r_{12}\mathrm{e}^{-2\mathrm{j}\kappa d} + \left(r_{10}r_{12}\mathrm{e}^{-2\mathrm{j}\kappa d}\right)^2 + \cdots\right],$$

se součtem

$$s_n = \frac{a_1}{1-q}$$

kde $a_1 = t_{01}t_{10}r_{12}\mathrm{e}^{-2\mathrm{j}\kappa d}$ a $q = r_{10}r_{12}\mathrm{e}^{-2\mathrm{j}\kappa d}$. Po sečtení dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{E_r^{(0)}}{E_i^{(0)}} &= r_{01} + \frac{t_{01}t_{10}r_{12}\mathrm{e}^{-2\mathrm{j}\kappa d}}{1 - r_{10}r_{12}\mathrm{e}^{-2\mathrm{j}\kappa d}} \\ &= \frac{r_{01} + r_{12}\mathrm{e}^{-2\mathrm{j}\kappa d}\left(t_{01}t_{10} - r_{01}r_{10}\right)}{1 - r_{10}r_{12}\mathrm{e}^{-2\mathrm{j}\kappa d}} \end{aligned} \tag{2.1.6}$$

Z Fresnelových rovnic zjistíme, že $r_{01} = -r_{10}$ a $(t_{01}t_{10} - r_{01}r_{10}) = 1$. Ke stejným závěrům dospěl Stokes jednodušeji užitím reverzibility optických paprsků. Uvažujme vlnu jednotkové amplitudy dopadající na rovinné rozhraní polarizovanou buď s nebo p. Předpokládáme pro jednoduchost, že úhel dopadu je menší než kritický úhel pro totální reflexi. V obou prostředích se pak mohou šířit lomené vlny. Na rozhraní se dopadající vlna rozdělí na vlnu odraženou s amplitudou r_{01} a vlnu procházející s amplitudou t_{01}. Díky reverzibilitě optických paprsků musí stejné vztahy platit pro paprsky šířící se v opačném smyslu. Po této reverzaci se původní odražená vlna s amplitudou r_{01} odráží jako vlna s amplitudou r_{01}^2 a procházející vlna jako $r_{10}t_{01}$. Obrácená (reverzovaná) původně procházející vlna t_{01} se rozdělí na odraženou s amplitudou $t_{01}r_{10}$ zůstávající v prostředí (1) a na vlnu procházející zpět do prostředí (0) jako $t_{01}t_{10}$. Šíření v původním i obráceném směru musí dávat stejné výsledky a dostáváme

$$\begin{aligned} t_{01}t_{10} + r_{01}^2 &= 1, \\ r_{01}t_{01} + r_{10}t_{01} &= 0. \end{aligned}$$

Odtud

$$\begin{aligned} t_{01}t_{10} - r_{01}r_{10} &= 1, \\ r_{01} &= -r_{10}. \end{aligned}$$

Můžeme tedy pro globální reflexní koeficient tohoto systému tří prostředí (0, 1, 2) psát

$$\frac{E_r^{(0)}}{E_i^{(0)}} = \frac{r_{01} + r_{12}\mathrm{e}^{-2\mathrm{j}\kappa d}}{1 + r_{01}r_{12}\mathrm{e}^{-2\mathrm{j}\kappa d}}. \tag{2.1.7a}$$

Podobná analýza pro transmisi vede k výrazu

$$\frac{E_t^{(2)}}{E_i^{(0)}} = \frac{t_{01}t_{12}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\kappa d}}{1 + r_{01}r_{12}\mathrm{e}^{-2\mathrm{j}\kappa d}}. \tag{2.1.7b}$$

Tyto vztahy ovšem platí jen buď pro s (TE) nebo p (TM) polarizaci. V izotropním prostředí může být nicméně každá plně polarizovaná vlna[1] dopadající šikmo na rovinné rozhraní rozložena na navzájem nezávislé s (TE) a p (TM) komponenty. Rovnice (2.1.7a), resp. (2.1.7b) tvoří základ klasické reflexní, resp. transmisní elipsometrie v izotropních prostředích. Vysvětlují také funkci Fabryova–Perotova rezonátoru.

Jsou-li prostředí obklopující vrstvu (1) stejná, platí $r_{12} = r_{10} = -r_{01}$ a $t_{12} = t_{10}$. Poměr amplitud odražené a dopadající vlny (amplitudový reflexní koeficient) plyne z (2.1.7a)

$$\frac{E_r^{(0)}}{E_i^{(0)}} = \frac{r_{01}\left[1 - \exp\left(-\mathrm{j}4\pi n_1 d/\lambda_{\mathrm{vac}}\right)\right]}{1 - r_{01}^2 \exp\left(-\mathrm{j}4\pi n_1 d/\lambda_{\mathrm{vac}}\right)} \tag{2.1.8a}$$

Poměr amplitud procházející a dopadající vlny (amplitudový transmisní koeficient) plyne z (2.1.7b)

$$\frac{E_t^{(2)}}{E_i^{(0)}} = \frac{t_{01}t_{10}\exp\left(-\mathrm{j}2\pi n_1 d/\lambda_{\mathrm{vac}}\right)}{1 - r_{01}^2 \exp\left(-\mathrm{j}4\pi n_1 d/\lambda_{\mathrm{vac}}\right)} \tag{2.1.8b}$$

označili jsme délku vlny ve vakuu λ_{vac}, kde

$$\lambda_{\mathrm{vac}} = \frac{2\pi c}{\omega} \tag{2.1.9}$$

Předpokládáme, jak je tomu obvykle, že platí $n_0 < n_1$. Relativní fázový posun o π plynoucí z Fresnelových rovnic mezi vnější (danou r_{01} např. na rozhraní vzduch – sklo) a vnitřní reflexí (danou r_{10} na rozhraní sklo – vzduch) $r_{01} = -r_{10}$ je přitom v souladu s požadavkem, aby odrazivost vrstvy klesala spojitě k nule s poklesem tloušťky vrstvy d až do jejího zmizení (tj. v limitě k nulové hodnotě při $d \to 0$).

Póly rovnice (2.1.7a) nebo (2.1.7b) určují rezonanční podmínku pro vlastní kmity této soustavy, tj. podmínku pro šíření vedených vln v planární dielektrické struktuře s jedinou izotropní vrstvou obklopenou izotropními poloprostory

$$1 + r_{01}r_{12}\mathrm{e}^{-2\mathrm{j}\kappa d} = 0 \quad \text{nebo} \quad 1 - r_{10}r_{12}\mathrm{e}^{-2\mathrm{j}\kappa d} = 0\,. \tag{2.1.10}$$

Tato podmínka je splněna pouze nad kritickým úhlem pro totální reflexi uvnitř vrstvy, když $n_0 < n_1$ a současně $n_1 > n_2$, tj. $\sin\theta_1 > n_0/n_1$ a současně $\sin\theta_1 >$ $> n_2/n_1$. Potom

$$|r_{10}| = 1, \quad |r_{12}| = 1 \qquad r_{10} = \mathrm{e}^{2\mathrm{j}\phi_{10}}, \quad r_{12} = \mathrm{e}^{2\mathrm{j}\phi_{12}}$$

[1]tj. vlna ideálně monochromatická a koherentní v obecném případě polarizovaná elipticky.

Oba reflexní koeficienty r_{10} a r_{12} a odpovídající fáze ϕ_{10} a ϕ_{12} nutno ještě rozlišit podle polarizací indexy TE, (nebo s, nebo $\perp$) resp. TM (nebo p, nebo $\|$).
Resonanční podmínka bude

$$1 - \mathrm{e}^{2\mathrm{j}\phi_{10}}\mathrm{e}^{2\mathrm{j}\phi_{12}}\mathrm{e}^{-2\mathrm{j}\kappa d} = 0\,.$$

Porovnáním exponenciál

$$\exp\left[-2\mathrm{j}\left(\frac{\omega}{c}d\,n_1\cos\theta_1 - \phi_{10} - \phi_{12}\right)\right] = \mathrm{e}^{-2\mathrm{j}\nu\pi} \quad (\nu \text{ — celé})$$

nebo porovnáním jejich argumentů

$$\frac{\omega}{c}d\,n_1\cos\theta_1 - \phi_{10} - \phi_{12} = \nu\pi, \tag{2.1.11}$$

kde reálné fáze splňují

$$\phi_{10}^{(TE)} = \frac{\left(n_1^2\sin^2\theta_1 - n_0^2\right)^{1/2}}{n_1\cos\theta_1} \tag{2.1.12a}$$

$$\phi_{10}^{(TM)} = \frac{n_1^2}{n_0^2}\frac{\left(n_1^2\sin^2\theta_1 - n_0^2\right)^{1/2}}{n_1\cos\theta_1} \tag{2.1.12b}$$

$$\phi_{12}^{(TE)} = \frac{\left(n_1^2\sin^2\theta_1 - n_2^2\right)^{1/2}}{n_1\cos\theta_1} \tag{2.1.12c}$$

$$\phi_{12}^{(TM)} = \frac{n_1^2}{n_2^2}\frac{\left(n_1^2\sin^2\theta_1 - n_2^2\right)^{1/2}}{n_1\cos\theta_1} \tag{2.1.12d}$$

Tak zvané charakteristické rovnice (2.1.10) a (2.1.11) vyjadřují podmínku existence netlumených vln v neabsorbující vrstvě. Popisují funkci dielektrického vlnovodu. Charakteristická rovnice pro TE polarizaci má tvar

$$\begin{aligned} &\frac{2\pi}{\lambda_{\mathrm{vac}}}d\left(n_1^2 - n_1^2\sin^2\theta_1\right)^{1/2} \\ - \quad &\mathrm{arctg}\left(\frac{n_1^2\sin^2\theta_1 - n_0^2}{n_1^2 - n_1^2\sin^2\theta_1}\right)^{1/2} - \mathrm{arctg}\left(\frac{n_1^2\sin\theta_1^2 - n_2^2}{n_1^2 - n_1^2\sin^2\theta_1}\right)^{1/2} = \nu\pi. \end{aligned} \tag{2.1.13}$$

Rovnice má jen diskrétní řešení, která můžeme vyjádřit např. pomocí úhlu θ_1, nebo pomocí podélné složky vektrou šíření $\pm[(\omega/c)\,n_1\sin\theta_1]$. Počet řešení roste s frekvencí a tloušťkou vrstvy. Pod jistou kritickou frekvencí (nebo tloušťkou d) nemá ani jedno řešení. Řešení nejsou závislá na smyslu šíření vln. Užitím identity

$$\mathrm{arctg}\,x + \mathrm{arctg}\,y = \mathrm{arctg}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) \tag{2.1.14}$$

lze charakteristickou rovnici pro TE polarizaci alternativně zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned}
&\operatorname{tg}\left[\frac{2\pi}{\lambda_{\mathrm{vac}}} d\left(n_1^2-n_1^2\sin^2\theta_1\right)^{1/2}\right] \\
= \quad & \frac{\left(n_1^2-n_1^2\sin^2\theta_1\right)^{1/2}\left[\left(n_1^2\sin^2\theta_1-n_0^2\right)^{1/2}+\left(n_1^2-n_1^2\sin^2\theta_1\right)^{1/2}\right]}{\left(n_1^2-n_1^2\sin^2\theta_1\right)-\left(n_1^2\sin^2\theta_1-n_0^2\right)^{1/2}\left(n_1^2\sin^2\theta_1-n_2^2\right)^{1/2}}.
\end{aligned} \tag{2.1.15}$$

Charakteristická rovnice pro TM polarizaci je

$$\begin{aligned}
&\frac{2\pi}{\lambda_{\mathrm{vac}}} d\left(n_1^2-n_1^2\sin^2\theta_1\right)^{1/2} \\
- \quad & \operatorname{arctg}\left[\frac{n_1^2}{n_0^2}\frac{\left(n_1^2\sin^2\theta_1-n_0^2\right)^{1/2}}{n_1\cos\theta_1}\right]-\operatorname{arctg}\left[\frac{n_1^2}{n_2^2}\frac{\left(n_1^2\sin\theta_1^2-n_2^2\right)^{1/2}}{n_1\cos\theta_1}\right]=\nu\pi.
\end{aligned} \tag{2.1.16}$$

Parametrům vystupujícím v rovnicích (2.1.13–2.1.16) lze dát následující význam. Složka vektoru šíření rovnoběžná s rovinami rozhraní, stejná ve všech třech prostředích s ohledem na požadavek Snellova zákona je

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda_{\mathrm{vac}}} n_1 \sin\theta_1. \tag{2.1.17}$$

Složka vektoru šíření ve vrstvě kolmá k rozhraním

$$\kappa = \frac{2\pi}{\lambda_{\mathrm{vac}}} n_1 \cos\theta_1. \tag{2.1.18}$$

splňuje

$$\left(\frac{2\pi}{\lambda_{\mathrm{vac}}} n_1\right)^2 = \kappa^2+\beta^2. \tag{2.1.19}$$

Definujeme příčné konstanty tlumení γ a δ určující rychlost útlumu evanescentních vln v okolních prostředích nad kritickým úhlem pro úplný odraz

$$\gamma = \left[\beta^2-\left(\frac{2\pi}{\lambda_{\mathrm{vac}}} n_0\right)^2\right]^{1/2}, \tag{2.1.20a}$$

$$\delta = \left[\beta^2-\left(\frac{2\pi}{\lambda_{\mathrm{vac}}} n_2\right)^2\right]^{1/2} \tag{2.1.20b}$$

Jejich převrácené hodnoty dávají hloubku vniku evanscentních vln do okolních prostředí pro vedené (tedy lokalizované) vlny (tzv. vedené módy). V blízkostí kritických úhlů $\gamma \to 0$ a $\delta \to 0$, hloubka vniku roste nade všechny meze. Pod kritickým úhlem přestávají být reálné, mění se na ryze imaginární a v exponenciálách charakterizují lomené rovinné harmonické vlny (tzv. zářivé módy). Pomocí těchto definic můžeme charakteristické rovnice stručně zapsat následujícím způsobem

$$\operatorname{tg} \kappa d \;=\; \frac{\kappa\,(\gamma+\delta)}{\kappa^2-\gamma\delta}. \tag{2.1.21}$$

pro TE polarizaci a ve tvaru

$$\operatorname{tg} \kappa d \;=\; \frac{\dfrac{\kappa}{n_1^2}\left(\dfrac{\gamma}{n_0^2}+\dfrac{\delta}{n_2^2}\right)}{\dfrac{\kappa^2}{n_1^4}-\dfrac{\gamma}{n_0^2}\dfrac{\delta}{n_2^2}}. \tag{2.1.22}$$

pro TM polarizaci. Poslední rovnice (2.1.22) je zajímavá tím, že může mít řešení i pro nulovou tloušťku h. Přepišme poslední rovnici do tvaru

$$\operatorname{tg} \kappa d \;=\; \frac{\dfrac{\kappa}{\varepsilon_1}\left(\dfrac{\gamma}{\varepsilon_0}+\dfrac{\delta}{\varepsilon_2}\right)}{\dfrac{\kappa^2}{\varepsilon_1^2}-\dfrac{\gamma}{\varepsilon_0}\dfrac{\delta}{\varepsilon_2}}. \tag{2.1.23}$$

V ušlechtilých kovech (Au, Ag, Cu) a ve vybraných spektrálních oblastech komplexní permitivita splňuje podmínku $\Re\varepsilon_2 = n_2^2 - \eta_2^2 < 0$, kde $n_2^2 \;\; \eta_2^2$, potom $\Re\varepsilon_2 \approx -\eta_2^2 < < 0$ a $\Im\varepsilon_2 = 2n_2\eta_2 \approx 0$. Na rozhraní těchto kovů s dielektrikem lze tedy nalézt hodnotu β (2.1.17) takovou, že čitatel v rovnici (2.1.23) je nulový (podmínka pro šíření *plasmonů*)

$$\frac{\gamma}{n_0^2} - \frac{\delta}{\eta_2^2} \;=\; 0. \tag{2.1.24}$$

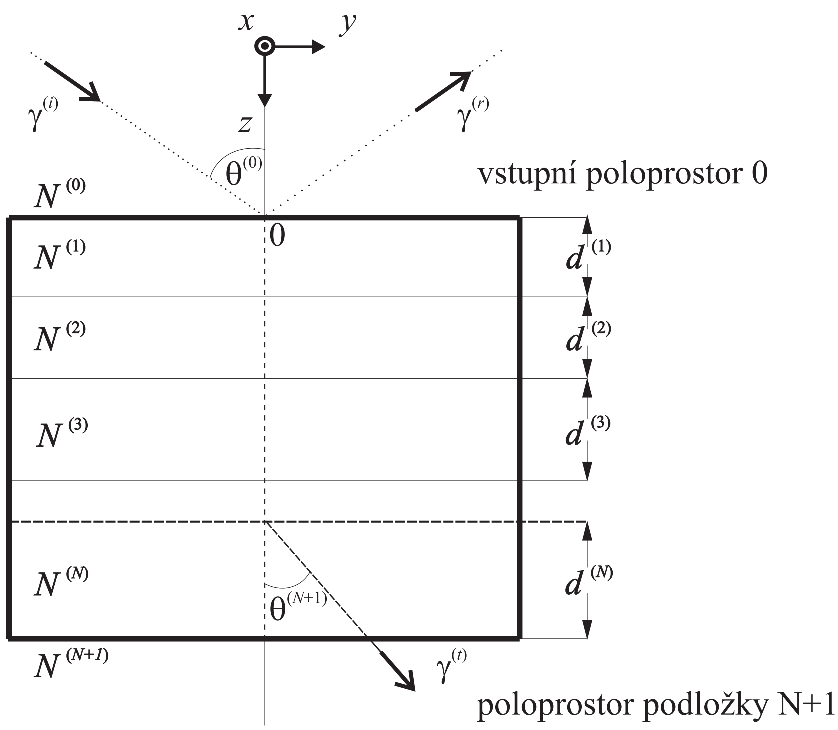
Tento jev tvoří základ moderních diagnostických metod v technologii nových materiálů, chemii, biologii, lékařství a farmacii.

Sčítání řad mnohanásobných odrazů přestává být praktické, když vyšetřujeme odraz a průchod při šikmém dopadu u mnohavrstvých struktur mezi dvěma poloprostory. Použijeme vhodnější přístup, který využívá kvazidiagonálních matic 4×4. Východiskem je linearita rovnic určujících šíření optických polí[2], spojitost tečných složek polí na rozhraní dvou izotropních prostředí a vzájemná nezávislost vlnových rovnic pro TE a TM polarizaci. Tato spojitost polí na rozhraních může být popsána lineární transformační kvazidiagonální maticí 4×4. Budeme uvažovat rovinné lineárně polarizované elektromagnetické vlny, které jsou řešením vlnových rovnic v lineárním, izotropním, homogenním a elektricky neutrálním prostředí.

2.2 Multivrstva

Uvažujme vrstevnatou strukturu na obr. 2.2 tvořenou posloupností $1,2,\ldots n,\ldots \mathcal{N}$ vrstev s navzájem rovnoběžnými rovinnými rozhraními, která je umístěna mezi dvěma poloprostory vyplněnými prostředími, která nazveme okolí (0) (vstupní poloprostor) a podložka $(\mathcal{N}+1)$ (výstupní poloprostor). Schematicky je posloupnost vrstev znázorněna na obr. 2.2. Všechna prostředí vrstev pokládáme

[2]Omezujeme se na lineární odezvu posloupnosti vrstev na dopadající optickou vlnu.



Obr. 2.2: Izotropní multivrstevnatá struktura. Vektory šíření dopadající a odražené vlny ve vstupním poloprostoru (okolí) (0) a procházející vlny ve výstupním poloprostoru (podložce) $(\mathcal{N}+1)$ obklopujících multivrstvu jsou označeny po řadě $\gamma^{(i)} = = (\omega/c)\, N^{(0)} \left(\hat{\boldsymbol{y}} \sin\theta^{(0)} + \hat{\boldsymbol{z}} \cos\theta^{(0)}\right)$, $\gamma^{(r)} = (\omega/c)\, N^{(0)} \left(\hat{\boldsymbol{y}} \sin\theta^{(0)} - \hat{\boldsymbol{z}} \cos\theta^{(0)}\right)$, and $\gamma^{(t)} = = (\omega/c) \left(\hat{\boldsymbol{y}} N^{(0)} \sin\theta^{(0)} + \hat{\boldsymbol{z}} N^{(\mathcal{N}+1)} \cos\theta^{(\mathcal{N}+1)}\right)$. Úhel dopadu (odrazu) v poloprostoru (0) je označen $\theta^{(0)}$, úhel lomu do poloprostoru $(\mathcal{N}+1)$ je označen $\theta^{(\mathcal{N}+1)}$. Jednotlivé vrstvy charakterizují komplexní indexy lomu $N^{(n)}$, a tloušťky $d^{(n)}$, $n = 1{,}2, \ldots ,\mathcal{N}$. Rovinná rozhraní vrstev jsou kolmá na osu z, rovina dopadu je kolmá na osu x..

za lineární, izotropní, homogenní a elektricky neutrální. Komplexní index lomu n-té vrstvy označíme $N^{(n)}$ a její tloušťku $d^{(n)}$. Komplexní indexy lomu okolního prostředí, resp. substrátu jsou označeny $N^{(0)}$, resp. $N^{(\mathcal{N}+1)}$.

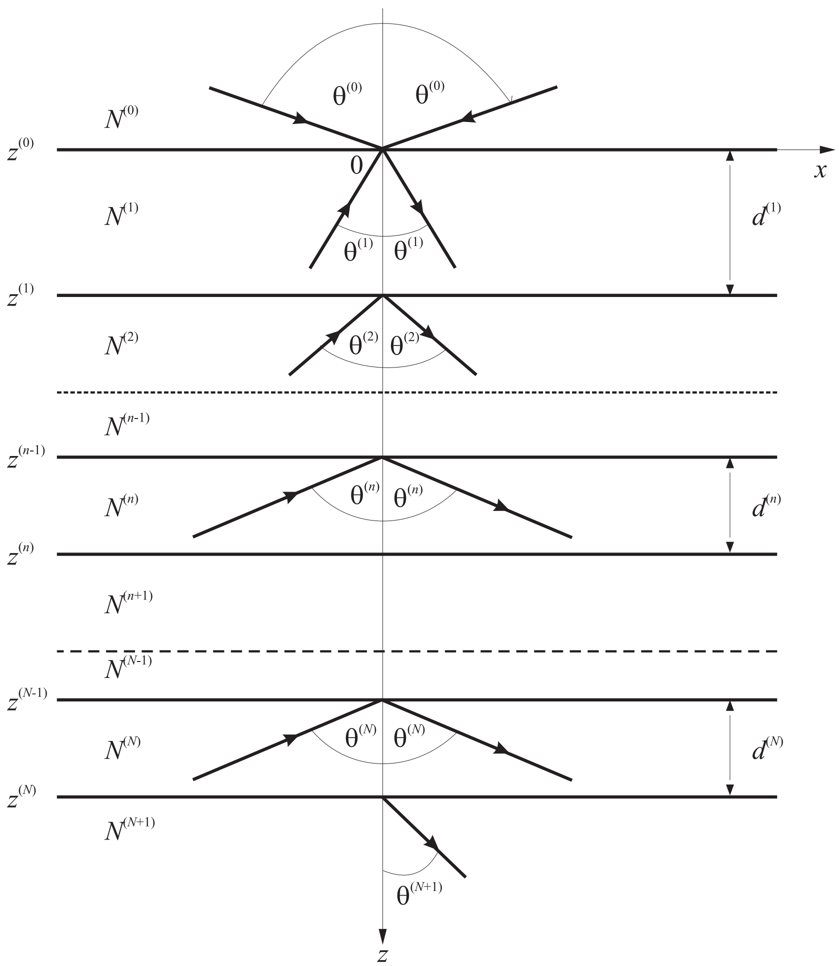
Rovinná monochromatická vlna o úhlové frekvenci ω s polarizací s nebo p z prostředí (0), tj. z okolí, dopadající na posloupnost vrstev vytváří v témže prostředí (0) odraženou rovinnou vlnu a v prostředí $\mathcal{N}+1$ vlnu procházející. Celkové pole uvnitř j-té vrstvy vybuzené dopadající vlnou tvoří dvě rovinné vlny: rovinnou vlnu postupující vpřed označenou indexem $+$ a rovinnou vlnu postupující zpět označenou indexem $-$.

Vektory šíření všech těchto rovinných vln leží v jedné rovině, v rovině dopadu[3] a vektory šíření dvou rovinných vln v n-té vrstvě svírají stejné úhly s kolmicí na rovinná rozhraní vrstev. Tuto kolmici umístíme na osu z orientovanou směrem do substrátu $(\mathcal{N}+1)$. Rovinná rozhraní vrstev popisují rovnice $z = z_n$, kde $n = = 0{,}1 \ldots ,\mathcal{N}$. Například rovinu rozhraní první vrstvy s okolím popisuje $z = z_0$.

[3] Výjimkou je limitní případ kolmého dopadu vlny na posloupnost, kdy rovinu dopadu nelze definovat. Volba vlastních polarizací není pak omezena na lineární polarizace. Stejně vyhoví libovolná dvojice ortogonálních eliptických polarizací.

Když je dopadající vlna z prostředí (0) lineárně polarizovaná s elektrickým vektorem kmitajícím kolmo (s) nebo paralelně (p) vůči rovině dopadu, všechny rovinné vlny vybuzené touto dopadající vlnou v každé z vrstev posloupnosti zůstávají stejně polarizované, buď kolmo (s) nebo paralelně (p) vůči rovině dopadu. Polarizace, s, nebo p (tzv. vlastní polarizace izotropní multivrstvy při šikmém dopadu) dopadající vlny se při postupu izotropní multivrstvou zachovává. V dalším tedy stále předpokládáme, že všechny vlny mají definovanou polarizaci s nebo p.

Nechť $\mathcal{E}^+$, resp. $\mathcal{E}^-$ označují komplexní amplitudy elektrických polí vln postupujících vpřed, resp. zpět v libovolné rovině $z = \text{constant}$ (obr. 2.3). Celkové pole



Obr. 2.3: Odraz a průchod rovinné vlny mnohavrstvou strukturou (vrstvy 1,2,$\ldots n, \ldots \mathcal{N}$) obklopenou polonekonečným okolím (0) a polonekonečným substrátem ($\mathcal{N}+1$). Úhel dopadu je označen $\theta^{(0)}$. Úhly vůči ose z, které svírají vektory šíření v n-té vrstvě, resp. v substrátu jsou označeny $\theta^{(n)}$, resp. $\theta^{(\mathcal{N}+1)}$. Rovinná rozhraní vrstev leží v rovinách $z = z^{(0)}, \ldots, z^{(n-1)}, z^{(n)}, \ldots, z^{(\mathcal{N}-1)}, z^{(\mathcal{N})}$, rovina dopadu je kolmá na osu x.

v rovině $z = \text{constant}$ pro jednu z polarizací lze popsat sloupcovým vektorem

$$\boldsymbol{E}(z) = \begin{pmatrix} \mathcal{E}^+(z) \\ \mathcal{E}^-(z) \end{pmatrix} \tag{2.2.1}$$

Uvažujeme pole ve dvou různých rovinách z' a z'' (rovnoběžných s rovinami rozhraní). Vzhledem k linearitě systému musí být $\boldsymbol{E}(z'')$ a $\boldsymbol{E}(z')$ vázány lineární transformací reprezentovanou maticí 2×2

$$\begin{pmatrix} \mathcal{E}^+(z') \\ \mathcal{E}^-(z') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{S}_{11} & \mathcal{S}_{12} \\ \mathcal{S}_{21} & \mathcal{S}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{E}^+(z'') \\ \mathcal{E}^-(z'') \end{pmatrix} . \tag{2.2.2}$$

Stručněji to můžeme zapsat

$$\mathbf{E}(z') = \mathbf{SE}(z'') , \tag{2.2.3}$$

kde

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \mathcal{S}_{11} & \mathcal{S}_{12} \\ \mathcal{S}_{21} & \mathcal{S}_{22} \end{pmatrix} . \tag{2.2.4}$$

Matice $\mathbf{S}$ charakterizuje úsek vrstevnaté struktury mezi dvěma rovnoběžnými rovinami $z = z'$ a $z = z''$. Zvolíme $z = z'$ a $z = z''$ na opačných stranách rozhraní $(n-1,n)$ mezi vrstvou $n-1$ a vrstvou n v infinitesimálně malé vzdálenosti od roviny rozhrani $z = z^{(n-1)}$. Rovnici (2.2.3) vztaženou k jedinému rozhraní $(n-1,n)$ zapíšeme jako

$$\lim_{z \to z_-^{(n-1)}} \mathbf{E}(z) = \mathbf{I}^{(n-1,n)} \lim_{z \to z_+^{(n-1)}} \mathbf{E}(z) , \tag{2.2.5}$$

kde $\mathbf{I}^{(n-1,n)}$ je matice 2×2 charakterizující rozhraní mezi vrstvou $n-1$ a vrstvou n. Zvolíme-li naopak roviny $z = z'$ a $z = z''$ uvnitř vrstvy n infinitesimálně blízko protějších rozhraní, z rovnice (2.2.3) dostaneme

$$\lim_{z \to z_+^{(n-1)}} \mathbf{E}(z) = \mathbf{L}^{(n)} \lim_{z \to \left(z^{(n-1)} + d^{(n)}\right)_-} \mathbf{E}(z) , \tag{2.2.6}$$

kde $\mathbf{L}^{(n)}$ je matice 2×2 charakterizující vrstvu n tloušťky $d^{(n)}$.

Předpokládáme, že měření je dostupná pouze odražená vlna v okolí a procházející vlna v substrátu. Hledáme vztah těchto vln s definovanou dopadající vlnou. Když zvolíme roviny z' a z'' v okolním prostředí (0) resp. v substrátu $(\mathcal{N}+1)$ těsně u rozhraní (01) (tj. u roviny $z = z^{(0)}$) resp. těsně u rozhraní $(\mathcal{N},\mathcal{N}+1)$ (tj. u roviny $z = z^{(\mathcal{N})}$), dostane rovnice (2.2.3) tvar

$$\lim_{z \to z_-^{(0)}} \mathbf{E}(z) = \mathbf{S} \lim_{z \to \left(z^{(\mathcal{N})}\right)_+} \mathbf{E}(z) . \tag{2.2.7}$$

Rovnice (2.2.7) definuje rozptylovou matici $\mathbf{S}$ která charakterizuje odraz a průchod vln vrstevnatou strukturou. Matici $\mathbf{S}$ lze vyjádřit jako součin matic rozhraní $\mathbf{I}^{(n-1,n)}$ a matic šíření uvnitř vrstev $\mathbf{L}^{(n)}$ v pořadí definovaném posloupností vrstev

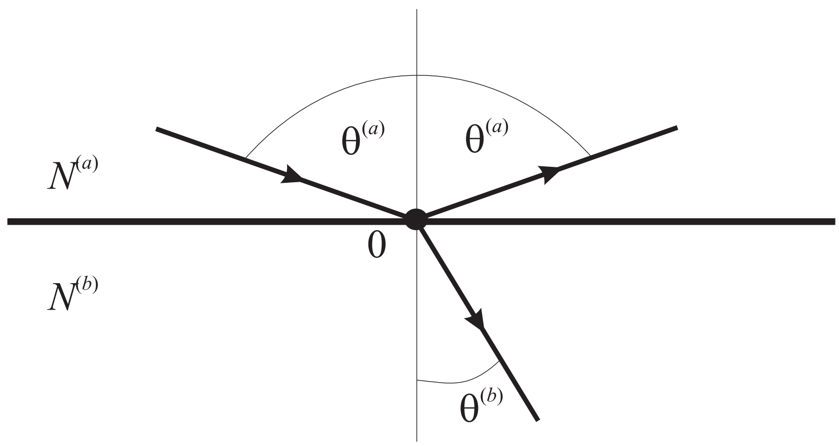
$$\mathbf{S} = \mathbf{I}^{(01)}\mathbf{L}^{(1)}\mathbf{I}^{(12)}\mathbf{L}^{(2)} \cdots \mathbf{I}^{(n-1,n)}\mathbf{L}^{(n)} \cdots \mathbf{L}^{(\mathcal{N})}\mathbf{I}^{(\mathcal{N},\mathcal{N}+1)} . \tag{2.2.8}$$

Rovnici (2.2.8) lze dokázat opakovaným použitím rovnice (2.2.3) na následující rozhraní a vrstvy struktury počínaje rozhraním (01) okolí – první vrstva a konče posledním rozhraním $(\mathcal{N},\mathcal{N}+1)$.

K určení rozptylové matice $\mathbf{S}$ kompletní struktury musíme stanovit matice jednotlivých rozhraní a jednotlivých vrstev. Matice rozhraní $\mathbf{I}^{(ab)}$ mezi dvěma prostředími a a b váže pole na obou stranách rozhraní

$$\begin{pmatrix} \mathcal{E}_a^+ \\ \mathcal{E}_a^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{I}_{11}^{(ab)} & \mathcal{I}_{12}^{(ab)} \\ \mathcal{I}_{21}^{(ab)} & \mathcal{I}_{22}^{(ab)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{E}_b^+ \\ \mathcal{E}_b^- \end{pmatrix} . \tag{2.2.9}$$

Uvažujme dva speciální případy, kdy jediná rovinná vlna dopadá na rozhraní ab buď z prostředí a nebo z prostředí b. Začneme případem, kdy jedinou dopadající vlnou (úhel dopadu $\theta^{(a)}$), je vlna $\mathcal{E}_a^+$ dopadající na rozhraní ab z prosředí a.



Obr. 2.4: Odraz a průchod rovinné vlny na rozhraní dvou prostředí charakterizovaných komplexními indexy lomu $N^{(a)}$ a $N^{(b)}$. Dopadající vlna přichází k rozhraní pouze z prostředí charakterizovaném $N^{(a)}$, její úhel dopadu a odrazu je označen $\theta^{(a)}$. Úhel lomu v prostředí charakterizovaném $N^{(b)}$ je $\theta^{(b)}$.

Vyjádříme komplexní amplitudy procházející (úhel lomu $\theta^{(b)}$), resp. odražené vlny (úhel odrazu θ^a), $\mathcal{E}_b^+$, resp. $\mathcal{E}_a^-$ (obr. 2.4) pomocí komplexní amplitudy dopadající vlny $\mathcal{E}_a^+$

$$\mathcal{E}_b^+ = t^{(ab)} \mathcal{E}_a^+ \tag{2.2.10a}$$
$$\mathcal{E}_a^- = r^{(ab)} \mathcal{E}_a^+ \tag{2.2.10b}$$

při $\mathcal{E}_b^- = 0$, kde $t^{(ab)}$, resp. $r^{(ab)}$ jsou Fresnelovy transmisní, resp. reflexní koeficienty pro dopad vlny na rozhraní ab z prostředí a. Současně podle rovnice (2.2.9) máme

$$\begin{pmatrix} \mathcal{E}_a^+ \\ \mathcal{E}_a^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{I}_{11}^{(ab)} & \mathcal{I}_{12}^{(ab)} \\ \mathcal{I}_{21}^{(ab)} & \mathcal{I}_{22}^{(ab)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{E}_b^+ \\ 0 \end{pmatrix} . \tag{2.2.11}$$

a rozepsáním

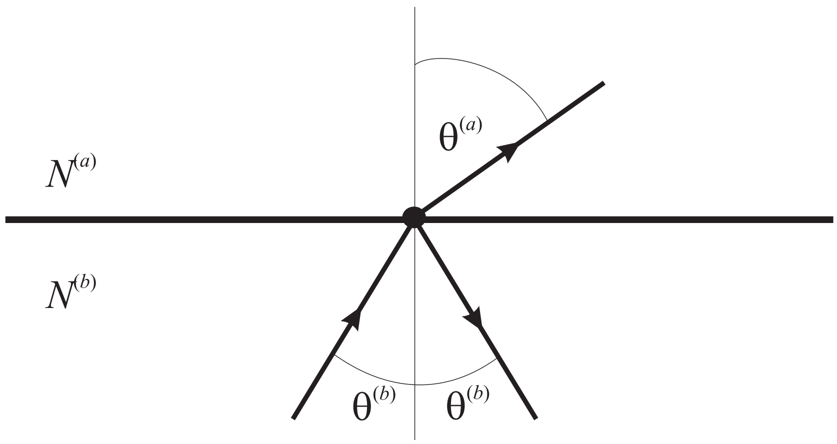
$$\mathcal{E}_a^+ = \mathcal{I}_{11}^{(ab)} \mathcal{E}_b^+ \tag{2.2.12a}$$
$$\mathcal{E}_a^- = \mathcal{I}_{21}^{(ab)} \mathcal{E}_b^+ \tag{2.2.12b}$$

Srovnáním rovnic (2.2.10) a (2.2.12) dostaneme

$$\mathcal{I}_{11}^{(ab)} = \frac{1}{t^{(ab)}} \tag{2.2.13a}$$

$$\mathcal{I}_{21}^{(ab)} = \frac{r^{(ab)}}{t^{(ab)}} . \tag{2.2.13b}$$

Nyní vyšetříme případ, kdy jedinou dopadající vlnou (úhel dopadu $\theta^{(b)}$), je vlna $\mathcal{E}_b^-$ dopadající na rozhraní ab z prostředí b. Vyjádříme komplexní amplitudy procházející (úhel lomu $\theta^{(a)}$), resp. odražené vlny (úhel odrazu $\theta^{(b)}$), $\mathcal{E}_a^-$, resp. $\mathcal{E}_b^+$ (obr. 2.5).



Obr. 2.5: Odraz a průchod rovinné vlny na rozhraní dvou prostředí charakterizovaných komplexními indexy lomu $N^{(a)}$ a $N^{(b)}$. Dopadající vlna přichází k rozhraní pouze z prostředí charakterizovaném $N^{(b)}$, její úhel dopadu a odrazu je označen $\theta^{(b)}$. Úhel lomu v prostředí charakterizovaném $N^{(a)}$ je $\theta^{(a)}$.

Úhel lomu v tomto druhém případě odpovídá úhlu dopadu v případě prvním. Pole v těsné blízkosti rozhraní jsou vázána vztahy

$$\mathcal{E}_b^+ = r^{(ba)}\mathcal{E}_b^- \tag{2.2.14a}$$

$$\mathcal{E}_a^- = t^{(ba)}\mathcal{E}_b^- \tag{2.2.14b}$$

při $\mathcal{E}_a^+ = 0$, kde $t^{(ba)}$, resp. $r^{(ba)}$ jsou Fresnelovy transmisní, resp. reflexní koeficienty pro dopad vlny na rozhraní ab z prostředí b. Současně podle rovnice (2.2.9) máme

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \mathcal{E}_a^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{I}_{11}^{(ab)} & \mathcal{I}_{12}^{(ab)} \\ \mathcal{I}_{21}^{(ab)} & \mathcal{I}_{22}^{(ab)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{E}_b^+ \\ \mathcal{E}_b^- \end{pmatrix} . \tag{2.2.15}$$

a rozepsáním

$$0 = \mathcal{I}_{11}^{(ab)}\mathcal{E}_b^+ + \mathcal{I}_{12}^{(ab)}\mathcal{E}_b^- \tag{2.2.16a}$$

$$\mathcal{E}_a^- = \mathcal{I}_{21}^{(ab)}\mathcal{E}_b^+ + \mathcal{I}_{22}^{(ab)}\mathcal{E}_b^- \tag{2.2.16b}$$

Dosazením za $\mathcal{I}_{11}^{(ab)}$ a $\mathcal{I}_{21}^{(ab)}$ podle rovnic (2.2.13) dostaneme z rovnic (2.2.16)

$$\mathcal{E}_b^+ = -\mathcal{I}_{12}^{(ab)} t^{(ab)} \mathcal{E}_b^- \tag{2.2.17a}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_a^- &= \frac{r^{(ab)}}{t^{(ab)}} \mathcal{E}_b^+ + \mathcal{I}_{22}^{(ab)} \mathcal{E}_b^- \\ &= \left(\frac{r^{(ab)} r^{(ba)}}{t^{(ab)}} + \mathcal{I}_{22}^{(ab)} \right) \mathcal{E}_b^- . \end{aligned} \tag{2.2.17b}$$

Ze srovnání rovnic (2.2.14) a rovnic (2.2.17) dostaneme

$$\mathcal{I}_{12}^{(ab)} = -\frac{r^{(ba)}}{t^{(ab)}} \tag{2.2.18a}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{22}^{(ab)} &= t^{(ab)} - \frac{r^{(ab)} r^{(ba)}}{t^{(ab)}} \\ &= \frac{t^{(ab)} t^{(ba)} - r^{(ab)} r^{(ba)}}{t^{(ab)}} . \end{aligned} \tag{2.2.18b}$$

Konečně pomocí vztahů mezi Fresnelovými koeficienty pro oba smysly šíření, tj. $r^{(ab)} = -r^{(ba)}$ a $t^{(ab)} t^{(ba)} - r^{(ab)} r^{(ba)} = 1$ dostáváme konečný tvar matice rozhraní

$$\mathbf{I}^{(ab)} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{t^{(ab)}} & \dfrac{r^{(ab)}}{t^{(ab)}} \\ \\ \dfrac{r^{(ab)}}{t^{(ab)}} & \dfrac{1}{t^{(ab)}} \end{pmatrix} = \frac{1}{t^{(ab)}} \begin{pmatrix} 1 & r^{(ab)} \\ r^{(ab)} & 1 \end{pmatrix} . \tag{2.2.19}$$

Fresnelovy reflexní a transmisní koeficienty pro jednoduché rovinné rozhraní, které vystupují v rovnici (2.2.19) se vypočítají užitím komplexních indexů lomu obou prostředí a lokálního úhlu dopadu. Ten plyne opakovaným užitím Snellova zákona

$$N^{(0)} \sin\theta^{(0)} = N^{(1)} \sin\theta^{(1)} \cdots = N^{(n)} \sin\theta^{(n)} \cdots = N^{(\mathcal{N})} \sin\theta^{(n)} = N^{(\mathcal{N}+1)} \sin\theta^{(\mathcal{N}+1)} . \tag{2.2.20}$$

Nyní po zjištění matice rozhraní $\mathbf{I}^{(ab)}$ se budem věnovat uvážení vlivu šíření vln homogenní vrstvou. Prostředí vrstvy charakterizuje komplexní index lomu $N^{(n)}$ její tloušťku označíme $d^{(n)}$. Pole dvou vln, která postupují vrstevnatou strukturou s opačnými smysly normálové složky vektoru šíření lze v rovině $z =$ constant zapsat

$$\mathcal{E}^{\pm}(z) = \mathcal{E}^{\pm}(0)\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \exp\left[-\mathrm{j}\frac{2\pi}{\lambda} y N(z) \sin\theta(z)\right] \exp\left[\mp\mathrm{j}\frac{2\pi}{\lambda} z N(z) \cos\theta(z)\right] , \tag{2.2.21}$$

kde λ je vlnová délka monochromatické vlny o úhlové frekvenci ω ve vakuu, $\dfrac{2\pi}{\lambda} = \dfrac{\omega}{c}$. Podélná, resp. normálová složka vektoru šíření je označena $\dfrac{2\pi}{\lambda} N(z) \sin\theta(z)$, resp. $\pm\dfrac{2\pi}{\lambda} N(z) \cos\theta(z)$. Podélná složka je stejná ve všech vrstvách i v poloprostorech okolí a substrátu. Rovnice (2.2.21) potom obsahuje faktor

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \exp\left[-\mathrm{j}\frac{2\pi}{\lambda} y N(z) \sin\theta(z)\right]$$

nezávislý na indexu vrstvy, který je společný všem vrstvám, okolí i substrátu. V dalším jej proto nebudeme psát. Speciálně v rovině $z = z^{(n-1)}$ uvnitř homogenní vrstvy (n)

$$\mathcal{E}^{\pm}\left(z^{(n-1)}\right) \;=\; \mathcal{E}^{\pm}(0)\exp\left[\mp \mathrm{j}\frac{2\pi}{\lambda} z^{(n-1)} N^{(n)} \cos\theta^{(n)}\right] . \tag{2.2.22}$$

podobně v rovině $z^{(n)} = z^{(n-1)} + d^{(n)}$

$$\mathcal{E}^{\pm}\left(z^{(n)}\right) \;=\; \mathcal{E}^{\pm}(0)\exp\left[\mp \mathrm{j}\frac{2\pi}{\lambda}\left(z^{(n-1)} + d^{(n)}\right) N^{(n)} \cos\theta^{(n)}\right] . \tag{2.2.23}$$

Úhel mezi směrem šíření ve vrstvě (n) a normálou k jejím rozhraním je označen $\theta^{(n)}$. Relace mezi elektrickými poli vln v rovinách $z = z^{(n-1)}$ a $z = z^{(n)}$, přičemž $d^{(n)} = \left(z^{(n)} - z^{(n-1)}\right)$ plyne z rovnic (2.2.22) a (2.2.23)

$$\mathcal{E}^{\pm}\left(z^{(n)}\right) \;=\; \mathcal{E}^{\pm}\left(z^{(n-1)}\right)\exp\left[\mp \mathrm{j}\frac{2\pi}{\lambda} d^{(n)} N^{(n)} \cos\theta^{(n)}\right] \tag{2.2.24}$$

Vztah mezi elektrickými poli vln uvnitř vrstvy n tesně u protějších rozhraní lze díky rovnici (2.2.24) vyjádřit maticově jako

$$\begin{pmatrix} \mathcal{E}^{+}(z^{(n-1)}) \\ \mathcal{E}^{-}(z^{(n-1)}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp\left(\mathrm{j}\beta^{(n)}\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(-\mathrm{j}\beta^{(n)}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{E}^{+}(z^{(n)}) \\ \mathcal{E}^{-}(z^{(n)}) \end{pmatrix} , \tag{2.2.25}$$

kde bezrozměrný parametr $\beta^{(n)}$ označuje[4]

$$\beta^{(n)} = \frac{2\pi}{\lambda} d^{(n)} N^{(n)} \cos\theta^{(n)} . \tag{2.2.26}$$

dostali jsme matici šíření ve vrstvě (n)

$$\mathbf{L}^{(n)} = \begin{pmatrix} \exp\left(\mathrm{j}\beta^{(n)}\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(-\mathrm{j}\beta^{(n)}\right) \end{pmatrix} . \tag{2.2.27}$$

Z matic rozhraní $\mathbf{I}^{(n)}$ a matic šíření ve vrstvě $\mathbf{L}^{(n)}$ můžeme zkonstruovat rozptylovou matici úplné struktury $\mathbf{S}$ maticovým násobením podle rovnice (2.2.8). Rovnici (2.2.7) můžeme rozepsat

$$\begin{pmatrix} \mathcal{E}^{+}(z^{(0)}) \\ \mathcal{E}^{-}(z^{(0)}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{S}_{11} & \mathcal{S}_{12} \\ \mathcal{S}_{21} & \mathcal{S}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{E}^{+}(z^{(\mathcal{N}+1)}) \\ \mathcal{E}^{-}(z^{(\mathcal{N}+1)}) \end{pmatrix} , \tag{2.2.28}$$

[4]Symbol β je zde použit v jiném významu, než v předešlém odstavci, kde označoval složku vektoru šíření rovnoběžnou s rozhraními

Situaci si podstatně zjednodušíme předpokladem, že vlna dopadající na strukturu pochází výhradně z okolního prostředí (0), tj. $\mathcal{E}^-(z^{(\mathcal{N})}) = 0$. Díky tomuto předpokladu můžeme definovat globální reflexní, resp. transmisní koeficienty struktury $r^{(0,\mathcal{N}+1)}$, resp. $t^{(0,\mathcal{N}+1)}$ rozepsáním maticové rovnice (2.2.28)

$$\mathcal{E}^+(z^{(0)}) = \mathcal{S}_{11}\mathcal{E}^+(z^{(\mathcal{N})}) \tag{2.2.29a}$$
$$\mathcal{E}^-(z^{(0)}) = \mathcal{S}_{21}\mathcal{E}^+(z^{(\mathcal{N})}) \tag{2.2.29b}$$

definovat globální reflexní, resp. transmisní koeficienty struktury $r^{(0,\mathcal{N}+1)}$, resp. $t^{(0,\mathcal{N}+1)}$

$$r^{(0,\mathcal{N}+1)} = \frac{\mathcal{E}^-(z^{(0)})}{\mathcal{E}^+(z^{(0)})} = \frac{\mathcal{S}_{21}}{\mathcal{S}_{11}} \tag{2.2.30a}$$
$$t^{(0,\mathcal{N}+1)} = \frac{\mathcal{E}^+(z^{(\mathcal{N})})}{\mathcal{E}^+(z^{(0)})} = \frac{1}{\mathcal{S}_{11}} \tag{2.2.30b}$$

Z rovnice (2.2.30) je zřejmé, že ke stanovení globálních reflexních a transmisních koeficientů stačí znalost prvního sloupce rozptylové matice $\mathbf{S}$. Pro účely elipsometrie musí být rozptylová matice $\mathbf{S}$ nebo alespoň její prvky $\mathcal{S}_{11}$ a $\mathcal{S}_{21}$ určeny pro obě vlastní lineární polarizace rovnoběžné (p) a kolmé (s) vůči rovině dopadu. Výpočty jsou programovatelné a realizují se počítačem. Nechť $\mathbf{S}_p$ a $\mathbf{S}_s$ představují rozptylové matice pro p a s polarizaci. Reflexní a transmisní koeficienty pro p a s polarizaci budou

$$r_p^{(0,\mathcal{N}+1)} = \frac{\mathcal{S}_{21p}}{\mathcal{S}_{11p}} \tag{2.2.31a}$$
$$r_s^{(0,\mathcal{N}+1)} = \frac{\mathcal{S}_{21s}}{\mathcal{S}_{11s}} \tag{2.2.31b}$$
$$t_p^{(0,\mathcal{N}+1)} = \frac{1}{\mathcal{S}_{11p}} \tag{2.2.31c}$$
$$t_s^{(0,\mathcal{N}+1)} = \frac{1}{\mathcal{S}_{11s}} \tag{2.2.31d}$$

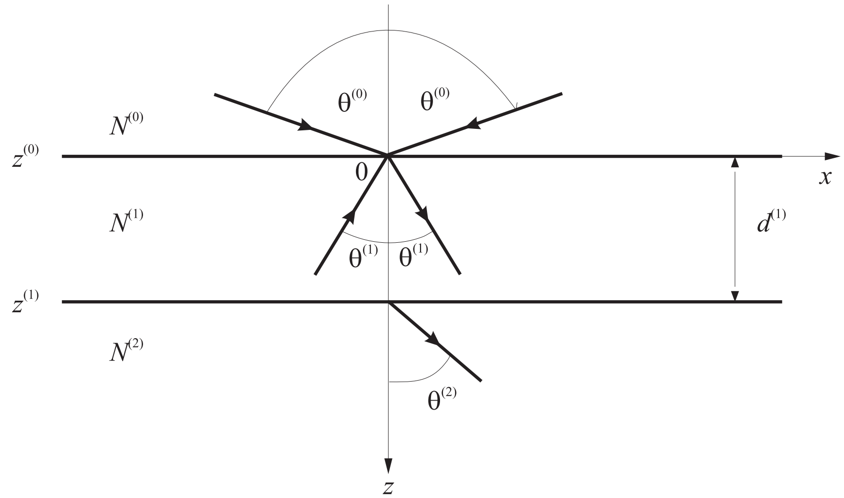
V reflexní elipsometrii se měří poměr komplexních reflexních koeficientů pro p a s polarizaci

$$\varrho_r = \frac{r_p^{(0,\mathcal{N}+1)}}{r_s^{(0,\mathcal{N}+1)}} = \frac{\mathcal{S}_{21p}}{\mathcal{S}_{11p}} \times \frac{\mathcal{S}_{11s}}{\mathcal{S}_{21s}}, \tag{2.2.32}$$

v transmisní elipsometrii se měří poměr komplexních transmisních koeficientů pro p a s polarizaci

$$\varrho_t = \frac{t_p^{(0,\mathcal{N}+1)}}{t_s^{(0,\mathcal{N}+1)}} = \frac{\mathcal{S}_{11s}}{\mathcal{S}_{11p}} \times \frac{\mathcal{S}_{11s}}{\mathcal{S}_{21s}}. \tag{2.2.33}$$

Matice $\mathbf{S}_p$ a $\mathbf{S}_s$ se liší jen díky rozdílům v maticích rozhraní $\mathbf{I}^{(n)}$, $n = 0,1,\ldots,\mathcal{N}$ pro p a s polarizace vystupujících v rovnici (2.2.8). Matice šíření ve vrstvě $\mathbf{L}^{(n)}$,



Obr. 2.6: Odraz a průchod rovinné vlny vrstvou tloušťky $d^{(1)}$ s komplexním indexem lomu $N^{(1)}$ obklopenou polonekonečným okolím charakterizovaným komplexním indexem lomu $N^{(0)}$ a polonekonečným substrátem s komplexním indexem lomu $N^{(2)}$.

$n = 1, \ldots, \mathcal{N}$ je vzhledem k tomu, že se omezujeme na izotropní multivrstvy pro obě polarizace stejná.

Jako příklad použití právě vysvětleného postupu uvažujme případ jediné vrstvy (1) mezi dvěma podprostory, okolím (0) a substrátem (2) podle obr. 2.6. Z rovnice (2.2.8) dostaneme pro rozptylovou matici $\mathbf{S}$

$$\mathbf{S} = \mathbf{I}^{(01)}\mathbf{L}^{(1)}\mathbf{I}^{(12)}\,, \tag{2.2.34}$$

což po dosazení podle rovnic (2.2.19) a (2.2.27) dává

$$\mathbf{S} = \frac{1}{t^{(01)}t^{(12)}} \begin{pmatrix} 1 & r^{(01)} \\ r^{(01)} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta^{(1)}} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta^{(1)}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & r^{(12)} \\ r^{(12)} & 1 \end{pmatrix}, \tag{2.2.35}$$

nebo

$$\mathbf{S} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta^{(1)}}}{t^{(01)}t^{(12)}} \begin{pmatrix} 1 + r^{(01)}r^{(12)}\mathrm{e}^{-2\mathrm{j}\beta^{(1)}} & r^{(01)}\mathrm{e}^{-2\mathrm{j}\beta^{(1)}} + r^{(12)} \\ r^{(01)} + r^{(12)}\mathrm{e}^{-2\mathrm{j}\beta^{(1)}} & r^{(01)}r^{(12)} + \mathrm{e}^{-2\mathrm{j}\beta^{(1)}} \end{pmatrix} \tag{2.2.36}$$

po provedení maticového násobení. Z rovnice (2.2.36) dostaneme

$$\mathcal{S}_{11} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta^{(1)}}}{t^{(01)}t^{(12)}} \left(1 + r^{(01)}r^{(12)}\mathrm{e}^{-2\mathrm{j}\beta^{(1)}}\right) \tag{2.2.37a}$$

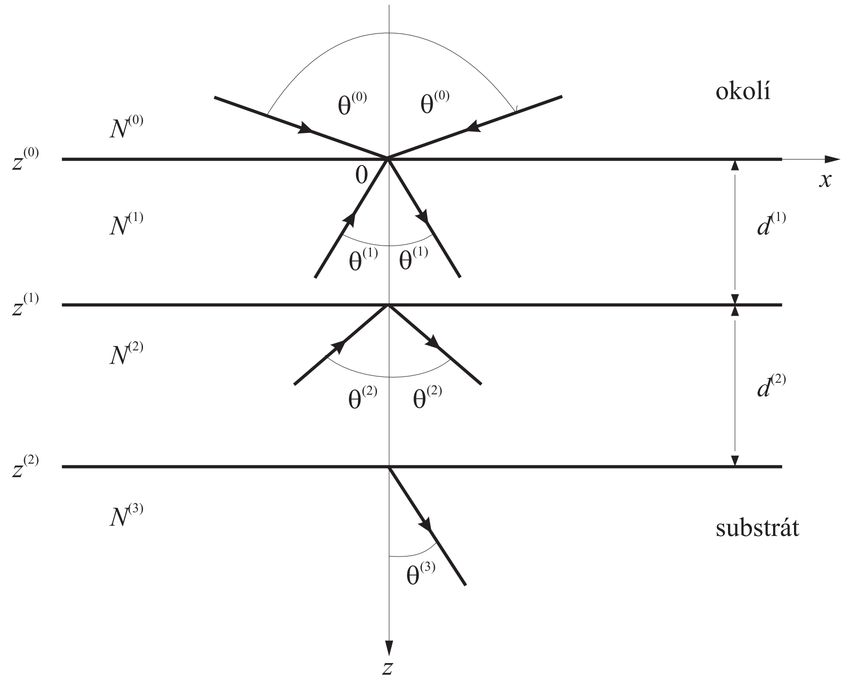
$$\mathcal{S}_{21} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta^{(1)}}}{t^{(01)}t^{(12)}} \left(r^{(01)} + r^{(12)}\mathrm{e}^{-2\mathrm{j}\beta^{(1)}}\right)\,. \tag{2.2.37b}$$

Dosazením výrazů pro $\mathcal{S}_{11}$ a $\mathcal{S}_{21}$ do rovnic (2.2.30) dostaneme

$$r^{(0,2)} = \frac{r^{(01)} + r^{(12)}\mathrm{e}^{-2\mathrm{j}\beta^{(1)}}}{1 + r^{(01)}r^{(12)}\mathrm{e}^{-2\mathrm{j}\beta^{(1)}}}\,, \tag{2.2.38a}$$

$$t^{(0,2)} = \frac{t^{(01)}t^{(12)}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta^{(1)}}}{1 + r^{(01)}r^{(12)}\mathrm{e}^{-2\mathrm{j}\beta^{(1)}}}\,, \tag{2.2.38b}$$

což jsou výsledky stejné jako ty, které plynou ze sčítání mnohanásobně odražených parciálních vln.



Obr. 2.7: Odraz a průchod rovinné vlny dvěma vrstvami tloušťky $d^{(1)}$, resp. $d^{(2)}$ s komplexním indexem lomu $N^{(1)}$, resp. $N^{(2)}$ obklopenou polonekonečným okolím charakterizovaným komplexním indexem lomu $N^{(0)}$ a polonekonečným substrátem s komplexním indexem lomu $N^{(3)}$.

Jako další příklad uvažujme strukturu tvořenou dvěma vrstvami (1) a (2) mezi dvěma podprostory, okolím (0) a substrátem (3) podle obr. 2.7. V tomto případě je sčítání mnohanásobně odražených vln uvntitř vrstev k získání reflexních a transmisních koeficientů nesmírně těžkopádné. Z rozptylové matice však tyto koeficienty dostaneme bez většího úsilí Z rovnice (2.2.8) dostaneme pro rozptylovou matici $\mathbf{S}$

$$\mathbf{S} = \mathbf{I}^{(01)}\mathbf{L}^{(1)}\mathbf{I}^{(12)}\mathbf{L}^{(2)}\mathbf{I}^{(23)} . \tag{2.2.39}$$

což po dosazení podle rovnic (2.2.19) a (2.2.27) dává

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \frac{1}{t^{(01)}t^{(12)}t^{(23)}} \begin{pmatrix} 1 & r^{(01)} \\ r^{(01)} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{j\beta^{(1)}} & 0 \\ 0 & e^{-j\beta^{(1)}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & r^{(12)} \\ r^{(12)} & 1 \end{pmatrix} \\ &\times \begin{pmatrix} e^{j\beta^{(2)}} & 0 \\ 0 & e^{-j\beta^{(2)}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & r^{(23)} \\ r^{(23)} & 1 \end{pmatrix} , \end{aligned} \tag{2.2.40}$$

nebo

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \frac{e^{j\beta^{(1)}}e^{j\beta^{(2)}}}{t^{(01)}t^{(12)}t^{(23)}} \begin{pmatrix} 1 & r^{(01)} \\ r^{(01)} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-2j\beta^{(1)}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & r^{(12)} \\ r^{(12)} & 1 \end{pmatrix} \\ &\times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-2j\beta^{(2)}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & r^{(23)} \\ r^{(23)} & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{e^{j\beta^{(1)}}e^{j\beta^{(2)}}}{t^{(01)}t^{(12)}t^{(23)}} \begin{pmatrix} 1 & r^{(01)}e^{-2j\beta^{(1)}} \\ r^{(01)} & e^{-2j\beta^{(1)}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & r^{(12)}e^{-2j\beta^{(2)}} \\ r^{(12)} & e^{-2j\beta^{(2)}} \end{pmatrix} \\
&\times \begin{pmatrix} 1 & r^{(23)} \\ r^{(23)} & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{e^{j\beta^{(1)}}e^{j\beta^{(2)}}}{t^{(01)}t^{(12)}t^{(23)}} \begin{pmatrix} 1 + r^{(01)}r^{(12)}e^{-2j\beta^{(1)}} & r^{(01)}e^{-2j\beta^{(1)}}e^{-2j\beta^{(2)}} + r^{(12)}e^{-2j\beta^{(2)}} \\ r^{(01)} + r^{(12)}e^{-2j\beta^{(1)}} & e^{-2j\beta^{(1)}}e^{-2j\beta^{(2)}} + r^{(01)}r^{(12)}e^{-2j\beta^{(2)}} \end{pmatrix} \\
&\times \begin{pmatrix} 1 & r^{(23)} \\ r^{(23)} & 1 \end{pmatrix} . \qquad (2.2.41)
\end{aligned}
$$

Pro relevantní prvky rozptylové matice dostaneme po provedení maticového násobení. Z rovnice (2.2.36) dostaneme

$$
\mathcal{S}_{11} = \frac{e^{j\beta^{(1)}}e^{j\beta^{(2)}}}{t^{(01)}t^{(12)}t^{(23)}} \left[\left(1 + r^{(01)}r^{(12)}e^{-2j\beta^{(1)}}\right) + r^{(23)}e^{-2j\beta^{(2)}}\left(r^{(01)}e^{-2j\beta^{(1)}} + r^{(12)}\right)\right] \qquad (2.2.42a)
$$

$$
\mathcal{S}_{21} = \frac{e^{j\beta^{(1)}}e^{j\beta^{(2)}}}{t^{(01)}t^{(12)}t^{(23)}} \left[\left(r^{(01)} + r^{(12)}e^{-2j\beta^{(1)}}\right) + r^{(23)}e^{-2j\beta^{(2)}}\left(e^{-2j\beta^{(1)}} + r^{(01)}r^{(12)}\right)\right] . \qquad (2.2.42b)
$$

Dosazením výrazů (2.2.42) pro $\mathcal{S}_{11}$ a $\mathcal{S}_{21}$ do rovnic (2.2.30) dostaneme

$$
r^{(0,3)} = \frac{\mathcal{S}_{21}}{\mathcal{S}_{11}} = \frac{r^{(01)}\left(1 + r^{(12)}r^{(23)}e^{-2j\beta^{(2)}}\right) + e^{-2j\beta^{(1)}}\left(r^{(12)} + r^{(23)}e^{-2j\beta^{(2)}}\right)}{1 + r^{(12)}r^{(23)}e^{-2j\beta^{(2)}} + r^{(01)}e^{-2j\beta^{(1)}}\left(r^{(12)} + r^{(23)}e^{-2j\beta^{(2)}}\right)} , \qquad (2.2.43a)
$$

$$
t^{(0,3)} = \frac{1}{\mathcal{S}_{11}} = \frac{t^{(01)}t^{(12)}t^{(23)}e^{-j\beta^{(1)}}e^{-j\beta^{(2)}}}{1 + r^{(12)}r^{(23)}e^{-2j\beta^{(2)}} + r^{(01)}e^{-2j\beta^{(1)}}\left(r^{(12)} + r^{(23)}e^{-2j\beta^{(2)}}\right)} . \qquad (2.2.43b)
$$

Je poučné tyto výsledky zapsat ještě jinak

$$
r^{(03)} = \frac{r^{(01)} + \left[\frac{r^{(12)} + r^{(23)}\exp\left(-2j\beta^{(2)}\right)}{1 + r^{(12)}r^{(23)}\exp\left(-2j\beta^{(2)}\right)}\right]\exp\left(-2j\beta^{(1)}\right)}{1 + r^{(01)}\left[\frac{r^{(12)} + r^{(23)}\exp\left(-2j\beta^{(2)}\right)}{1 + r^{(12)}r^{(23)}\exp\left(-2j\beta^{(2)}\right)}\right]\exp\left(-2j\beta^{(1)}\right)} , \qquad (2.2.44a)
$$

$$
t^{(03)} = \frac{t^{(01)}\left[\frac{t^{(12)}t^{(23)}\exp\left(-j\beta^{(2)}\right)}{1 + r^{(12)}r^{(23)}\exp\left(-2j\beta^{(2)}\right)}\right]\exp\left(-j\beta^{(1)}\right)}{1 + r^{(01)}\left[\frac{r^{(12)} + r^{(23)}\exp\left(-2j\beta^{(2)}\right)}{1 + r^{(12)}r^{(23)}\exp\left(-2j\beta^{(2)}\right)}\right]\exp\left(-2j\beta^{(1)}\right)} . \qquad (2.2.44b)
$$

V hranatých závorkách pozorujeme výrazy $r^{(13)}$ a $t^{(13)}$, které jsou obdobou rovnic (2.2.38). Získáváme postup k rozšíření na tři a více vrstev. Pro systém tří vrstev obklopený okolím a substrátem tak dostaneme

$$
\begin{aligned}
r^{(04)} &= \frac{r^{(01)} + r^{(14)} \exp\left(-2\mathrm{j}\beta^{(1)}\right)}{1 + r^{(01)} r^{(14)} \exp\left(-2\mathrm{j}\beta^{(1)}\right)}\,, \\
t^{(04)} &= \frac{t^{(01)} t^{(14)} \exp\left(-\mathrm{j}\beta^{(1)}\right)}{1 + r^{(01)} r^{(14)} \exp\left(-2\mathrm{j}\beta^{(1)}\right)}\,,
\end{aligned}
\tag{2.2.45a, b}
$$

kde

$$
r^{(14)} = \frac{r^{(12)} + \left[\dfrac{r^{(23)} + r^{(34)} \exp\left(-2\mathrm{j}\beta^{(3)}\right)}{1 + r^{(23)} r^{(34)} \exp\left(-2\mathrm{i}\beta^{(3)}\right)}\right] \exp\left(-2\mathrm{j}\beta^{(2)}\right)}{1 + r^{(12)} \left[\dfrac{r^{(23)} + r^{(34)} \exp\left(-2\mathrm{j}\beta^{(3)}\right)}{1 + r^{(23)} r^{(34)} \exp\left(-2\mathrm{j}\beta^{(3)}\right)}\right] \exp\left(-2\mathrm{j}\beta^{(2)}\right)}\,, \tag{2.2.46a}
$$

$$
t^{(14)} = \frac{t^{(12)} \left[\dfrac{t^{(23)} t^{(34)} \exp\left(-\mathrm{j}\beta^{(3)}\right)}{1 + r^{(23)} r^{(34)} \exp\left(-2\mathrm{j}\beta^{(3)}\right)}\right] \exp\left(-\mathrm{j}\beta^{(2)}\right)}{1 + r^{(12)} \left[\dfrac{r^{(23)} + r^{(34)} \exp\left(-2\mathrm{j}\beta^{(3)}\right)}{1 + r^{(23)} r^{(34)} \exp\left(-2\mathrm{j}\beta^{(3)}\right)}\right] \exp\left(-2\mathrm{j}\beta^{(2)}\right)}\,. \tag{2.2.46b}
$$

Předpokládali jsme, že optické parametry (v našem případě komplexní index lomu $N^{(n)}$ $n = 1, \ldots, \mathcal{N}$) každé z vrstev jsou homogenní a mění se skokem na rozhraních.[5] Když se optické parametry struktury mění spojitě uvnitř nehomogenní vrstvy tak, že její optické parametry se mění ve směru kolmém k rozhraní naše metoda zůstává použitelná. Stačí, když nehomogenní vrstvu rozdělíme na vhodný počet vrstev, které již můžeme pokládat za homogenní.

Literatura ke kapitole 2

[1] R. M. A. Azzam, N. M. Bashara, *Ellipsometry and Polarized Light* (Elsevier, Amsterdam, 1987) Kapitola 4.

[5] Struktura je obklopena homogenními izotropními poloprostory okolí, resp. substrátu charakterizovanými $N^{(0)}$, resp. $N^{(\mathcal{N}+1)}$